债券投资组合的信用风险度量结题报告

山东大学齐鲁证券金融研究院

债券投资组合的信用风险度量项目组

项目负责人：林路 教授

项目组成员：高强 董平 柴海涛 唐国锋

卞晨晔 白凯敏 任鹏飞

2014 年4 月

摘 要

信用风险指由债务人信用变化而引起其债务市值减少的风险，一般由违约风险和利差风险组成。90 年代至今，金融机构资产状况日益多样化,金融机构迫切需要更有效的定量工具来辅助进行信用风险管理。银监会于 2008 年提出，信用风险是中国的银行面临的最主要的风险,促使各大银行和公司对信用风险管理提出了更高的要求。

目前，较为成熟的信用风险度量模型有 KMV 模型，Credit Metrics 模型，Credit Risk + 模型等等，其中，KMV 模型因其理论基础好、假设条件低等优点，成为国际上最重要的信用风险评级模型。但是，KMV 模型也存在着很大的弊端，一方面，传统 KMV 模型参数估计方法落后，估计结果精度较差；另一方面，KMV 模型主要用来度量单一债券的风险,目前将 KMV 模型用于债券组合的相关研究很难被找到。

本文立足债券组合的信用风险评级这个热点问题，选择国际最先进的 KMV 模型为基础，在完美继承 KMV 模型优点的基础上，针对 KMV 的缺点进行改进：

针对 KMV 模型参数估计不稳定、不准确的问题：将 EM 算法引入 KMV 模型中，创建 EM-KMV 模型，并通过实证分析，证明 EM-KMV 模型在风险度量的精确性方面远远优于传统 KMV 模型。

针对 KMV 无法度量组合风险问题：一方面，将 Copula 函数理论与 KMV 模型结合，可以很好克服市场复杂性和不确定性的干扰，体现各公司之间真实的违约相关性;另一方面,提出了直观观测法及定量分析法,详细阐明了组合平均损失、组合 VaR 等风险指标的计算原理和过程，并通过实证进行了深入、细致的分析。

本文切合我国金融市场的实际情况，利用齐鲁证券提供的我国上市公司的真实数据进行实证分析，通过将传统 KMV 模型结果、EM-KMV 模型的结果与国际标准的评级违约率数据作对比，充分证明了 EM-KMV 模型相较传统模型的优越性；通过分析多个公司组合数据,提出评价组合信用风险的直观分析法和定量分析法,创新性的提出了组合 VaR、平均损失等组合风险指标并给出了计算的具体方法。

关键词：信用风险 KMV 模型 EM 算法 copula 理论 组合 VaR 平均损失

目 录

一、信用风险及常见的度量模型

随着我国债券市场的不断发展扩容，其中的信用风险问题也日益凸显，如何度量债券组合的信用风险已经成为我国政府监管部门及各大金融机构的一项重要议题。2012 年，国家发改委发布了《国家发改委办公厅关于进一步强化企业债券风险防范管理有关问题的通知》，对企业债券的发行提出了一些具体要求。2013 年，中央经济工作会议首次把控制和化解地方政府性债务作为经济工作的首要任务。2014 年 3 月 4 日，“11 超日债”的违约打破了中国债市刚性兑付神话，并将信用风险暴露在聚光灯下。由此可见，如何使用定量工具来辅助进行信用风险管理已经成为各大金融机构面临的重大问题。

1.1 、信用风险概述

信用风险是金融市场上最古老的风险之一，关于信用风险有多种定义。根据新巴塞尔协议，信用风险是指交易对象无力履约的风险，即债务人未能如期偿还其债务造成违约，而给经济主体带来的损失。这种无力履约的原因往往是破产或其他严重的财务问题。

信用风险有狭义和广义之分。狭义的信用风险通常是指信贷风险，即在借贷过程中，由于各种不确定性，使借款人不能按时偿还贷款，造成银行贷款本金及利息损失的可能性。它包括两方面的含义：一是指贷款本息不能全部回收，致使银行直接遭受资金上的损失；二是指贷款不能按期收回形成逾期贷款，导致银行资金周转困难。广义的信用风险是指在市场经济条件下，企业或个人，在其经济活动中与他人或企业签订经济合约，所面临的合同对方当事人不履约的风险。

信用风险主要由两部分组成，一是违约风险，它是指交易一方不愿或无力支付约定款项致使交易另一方遭受损失的可能性；二是信用价差风险，它是指由于信用品质的变化引起信用价差的变化而导致的损失。

信用风险的产生既与整体经济形势有关，又与具体公司的经营状况有关。经济运行的周期性造成整体信用风险的波动，当处于经济扩张期时，由于总体盈利形势良好，平均违约率较低，信用风险较小。反之，在处于经济紧缩期时，信用风险将大幅增加。此外，由于人为或者其他原因，可能发生对公司的整体盈利造

成重大影响的特殊事件，这与经济运行周期无关，而与具体公司的经营情况有重要的关联。

1.2、现代信用风险度量模型

20 世纪 80 年代，随着计算机技术的进一步发展以及经济金融全球一体化的发展趋势，信用风险度量模型蓬勃发展，得到了理论界和实务界的广泛关注。80 年代债务危机之后，金融界对信用风险的防范与管理做出了一系列措施；到了 90 年代，传统的信用风险度量方法已经不能满足现代信用风险管理的要求，金融界开始建立度量信用风险的内部方法和模型；90 年代以后，信用风险度量与管理获得了很大的发展，大量的度量模型被广泛应用。其中，最常用的有以下几种模型：

(1). Credit Metrics 模型

Credit Metrics 模型是 JP.Morgan 在 1997 年开发出来的信用风险分析工具，该模型的基础是在给定的时间段内估计一些非上市流通的资产组合将来价值变化的分布状态。该模型可用于单笔贷款或贷款组合的信贷风险测算，也即是通过求解信贷资产在信用等级转移的影响下的价值分布，得到信用风险的 Var 值。该模型假设违约的相关性是实际存在的，通过对历史评级结果的观测，可以求出评级变动的联合分布。模型以符合马尔科夫过程的信用评级迁移为基础，应用由历史数据估计出来的一年期违约转移矩阵，采用离散的等级形式，用 MTM 模型对资产价值和信用损失进行估计，用合同现金流折现法计算期末价值。

Credit Metrics 模型能够比较全面地把握信用等级变化对贷款价值的影响，但是其本身存在着许多不足，如模型没有反映特定债务人当前的信用质量变化情况，没有解释信用风险定价及其基础模型问题；另外，模型在使用的过程中，需要大量的信用评级数据，而目前在中国，这种数据是十分缺乏的，因此该模型不适合用于度量我国上市公司的信用风险。

(2). Credit Risk + 模型

Credit Risk + 模型是瑞士银行金融产品开发部于 1996 年推出的信用风险度量模型，其运用保险学框架推导出债券或贷款资产组合的损失分布。为了提高风险度量的精确程度，模型将风险暴露划分成不同的频段；假设单个债券或贷款

的违约遵循一个连续的随机泊松过程和外生过程，与公司的资本结构无关；模型所描述的损失分布密度函数可以直接估计出组合的预期损失和非预期损失。对于大量债务人，模型假设任何特别债务违约概率都很小，且任何期间发生的违约数独立于其他期间的违约数。模型很大程度上借鉴了保险业中的计算方法，相对简单，对不同地区、不同部门等各种类型的风险暴露都有较强的处理能力，但它同样也存在着一些不足，如该模型假设债务人的债务价值是固定不变的、没有考虑市场风险、忽略转移概率等，这些都是与实际不相符的。

(3).Credit Portfolio View 模型

Credit Portfolio View 模型是麦肯锡公司在 1997 年提出的。此模型不仅关注违约风险，也关注联合的条件违约概率分布以及评级转移概率分布。与其它模型相比，在 CPV 模型中，决定违约概率的不是资产价格、经验参数或随机的模拟结果，而是类似 GDP 增长率、失业率、利率、汇率、政府支出等宏观经济变量。系统性信用风险跟从信贷周期，而信贷周期又跟从经济周期。从信贷组合的角度来看，经济状态是决定信用风险的共同因素，是系统性信用风险的最终来源，模拟经济状态是模拟信贷组合的系统性风险的起点。其基本建模策略是，首先通过多元经济计量模型来模拟宏观经济状态。然后将经济状态与协同的条件违约概率和评级转移概率对应起来，以此为基础描绘出信贷组合的损失分布。

但是，CPV 模型也存在局限性，主要在于：第一，需要国家和行业的大量长期数据，这些数据往往较难获得，模型的应用会受到限制。第二，2 阶自回归预测出的宏观经济变量未来值作为模型的输入值，其准确性尚有争议。第三，模型关于违约时间与宏观经济变量之间关系的假设太强，相应地，模型忽略了关系到违约事件的一系列微观因素，尤其是企业的个体特征。

(4). KMV 模型

1993 年，KMV 公司利用 Black - Scholes - Merton 模型(BSM Model)提出了著名的信用监测模型(Credit Monitor Model)，后经 Longstaff 和 Schwarz(1995)、Dsa(1995)和 Zhou(1997)的进一步扩展，形成影响广泛的 KMV 模型。该模型把公司负债看作是以公司资产价值为标的看涨期权，认为当公司资产价值低于债务价值时，公司就会对债务人违约。模型从公司股票的市场价值、股票价值的波动性和负债的账面价值估计出公司的市场价值及其波动性，通过公司的长期负债和短

期负债计算出公司的违约点和违约距离，最后通过违约距离和预期违约率之间的对应关系确定公司的预期违约率。

KMV 模型的信用风险衡量指标—预期违约率—主要来自股票市场价格变化的有关数据，可以及时反映信用风险水平的变化。该模型主要依赖股票市场数据和财务报表中的负债数据进行计算，能够防止会计信息失真对模型结果的影响。另外，股价中包含了投资者对于公司未来发展的预期，预期违约率中包含了投资者对信用状况未来发展趋势的判断，因此，该模型具有一定的前瞻性。国内对该模型的研究也比其他信用风险度量模型要多。

二、KMV 模型

2.1、KMV 模型的发展及现状

KMV 模型的起源可以追溯到 1972 年 Black，Scholes 和 Merton 有关期权定价的模型；1974 年，Merton 提出了将之应用于信用管理的早期思想。Merton 模型的基本思想是利用股价的波动来评价股权公开交易公司的信用风险，这是一套量化信用风险的概念性技术框架。由于宏观经济状况、行业及公司的信息能够以很快的速度传导到投资者和投资分析人员那里从而导致股价会在整个交易日内不断的变化波动，因此在公司股价的变化中蕴含着关于该公司可信度变化的可靠证据。据此，银行等放贷者就有机会利用这些现成的、规模巨大的信用风险管理工具，对所有股权公开交易的公司的违约可能性做出预测。

20 世纪 80 年代早期，KMV 公司的先驱者 Vasicek 和 McQuown 发展了改进的期权定价公式以计算违约距离，其后 KMV 公司收集了包括 3400 上市公司和 40000 家非上市公司自 1973 年以来的资料，建立了庞大的数据库，得到从违约距离到预期违约率的映射关系，取得了良好的预测效果。

目前，国内外对 KMV 模型的研究仍然非常活跃。国外对 KMV 模型的研究大致分成两个部分，即对 KMV 模型进行有效性验证和对 KMV 模型的有效性评价。我国学者从 1998 年开始关注 KMV 模型，最早对 KMV 模型的研究基本上都局限于理论研究，很少有这方面的实证分析。之后，关于 KMV 模型的研究则发展为通过实证对 KMV 模型进行有效性的研究，大量的实证研究和相关文献资料开始形成。

KMV 模型的研究思路可以划分成两类：

一类是不修正 KMV 模型，直接用国内的样本数据进行验证。通常按照 KMV 模型的基本框架并利用国外研究的模型和关系函数，以我国上市公司为样本，只是所选用的样本数据规模及分类有所不同，验证后的基本结论是，KMV 模型的风险预测方法可以弥补传统方式的不足，有着很好的运用前景。同时，也有部分学者将 KMV 模型运用于个别行业或几个行业的研究。研究结果表明，KMV 模型能够较好地甄别不同行业的信用风险，是目前最适合我国上市公司的信用风险度量模型。

另一类则在修正 KMV 模型的基础上，再用国内的样本数据进行验证，以探求模型在我国的具体适用性。虽然 KMV 模型已经被证明是很有效的信用风险度量技术，并且在国外应用非常广泛，但由于 KMV 模型只是一个概念性框架，没有给出

具体的计算公式;同时考虑到 KMV 模型创建时的宏观经济背景与我国的现行经济环境不同这一因素,所以在研究中必须对 KMV 模型进行改进和修正以适合我国的具体情况。

2.2、KMV 模型的理论

1)、Black-Scholes 期权定价理论

期权定价是一个十分具有历史意义的问题。早在 1900 年,著名学者 Louis Bachelier 在他发表的名叫《投机交易理论》的论文中就已经提到了期权的定价问题,在他的文章中,首次利用随机游走的思想建立了股票价格运行的随机模型,对现代金融学的研究具有里程碑式的意义。此后,经过许许多多学者的研究及其修正,直到 1973 年,Fischer Black 和 Myron Scholes 建立了看涨期权定价公式,这也是目前应用最广泛的两个期权定价方法之一。

Black-Scholes 期权定价公式的基本假设:

(a)原生资产价格演化遵循几何 Brown 运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.1}$$

这里 μ 为期望回报率(expected return rate)(常数),

σ 为波动率(volatility)(常数),

dW_t 为标准 Brown 运动(standard Brown motion),

$E(dW_t) = 0,$

$Var(dW) = dt,$

(b)无风险利率 r 是常数,

(c)原生资产不支付股息,

(d)不支付交易费用(transaction cost)和税收(tax),

(e)不存在套利机会。

在上述假设的基础上,设欧式看涨期权的价格 $V = V(S,t)$,得到它的 Black-Scholes 公式为

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{2.2}$$

其中

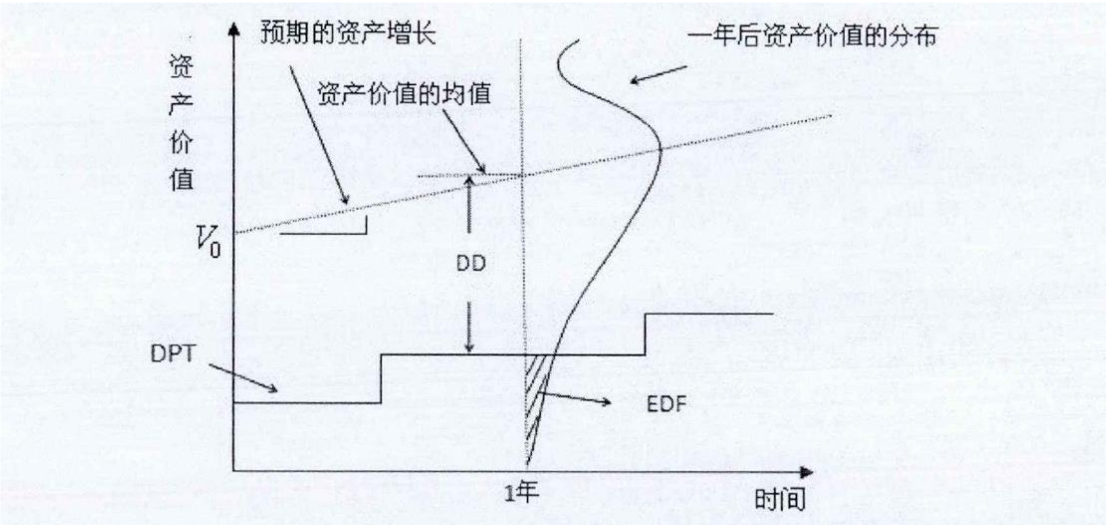
$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{2.4}$$

这里 S 表示标的证券的价格，K 表示看涨期权的执行价格，t 表示当前时间，T 表示期权的到期时间，$N(\bullet)$ 表示标准正态分布的累积概率分布函数。

2）、KMV 模型的基本理论

KMV 模型的基木思路就是将公司负债看作是买入的一份欧式看涨期权，也就是说当公司的股东借入一笔负债的时候，相当于买入了一份以公司资产价值为标的欧式看涨期权，假设还款期限为 T。当期末公司的资产价值低于一定水平时，公司就会对债权人违约，即不执行看涨期权，将发生违约事件的这一水平点称为违约点(Default Point，DPT)。同时，将公司为了预期资产价位到违约点(DPT)的距离称为违约距离(Distance to Default，DD)，这是 KMV 模型的核心，违约距离越大，公司发生违约的概率越小，反之，公司发生违约的概率越大。最后，基于具有不同违约距离值的公司违约的历史数据库，确定违约距离与违约率之间的映射，得到预期违约率(Expected Default Frequency，EDF)。假设还款期限为一年，预期违约率原理如下图：

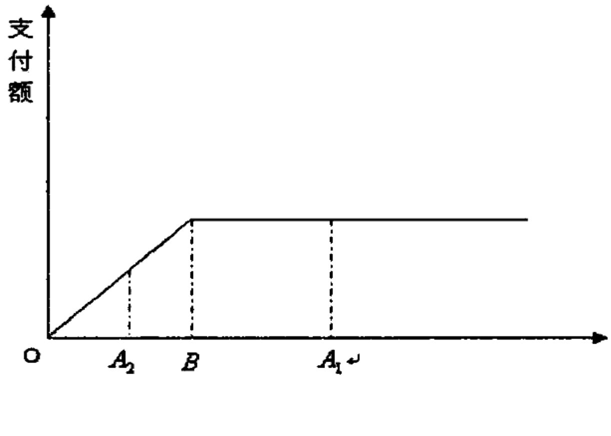


假定公司资产价值服从正态分布，从预期违约率原理图来看，在未来时刻，公司的资产价值分布特征可以用其期望值和波动率表示。在 KMV 模型中，当公司资

产价值的均值低于违约点水平时,公司发生违约,预期违约概率(EDF)由公司未来资产价值分布线同违约点水平线(DPT)包围的阴影部分的面积表示。从图中可以看出,违约距离的大小取决于违约点水平的位置和资产价值的期望值大小,违约概率的大小取决于违约点水平的位置和未来资产价值分布曲线的形状。因此,要得到违约距离的大小,首先应求出公司未来资产的预期价值和违约点水平。为了更好地理解 KMV 模型,首先需要了解一下 KMV 模型与期权的关系。

3)、KMV 模型与期权的关系

KMV 模型是在 Merton 的风险债务估值理论基础上推出的。在这里,通过银行贷款的例子来导出 KMV 的基本模型。可以把贷款看作是一种期权交易,通俗地讲,当银行将贷款发放给了借款人,就相当于给了借款人一种权利,这样贷款的偿还与否都取决于借款人的情况。如果借款人有能力偿还贷款,那么银行可以得到一定的收入;否则,借款人违约,银行遭遇损失。假定银行向企业发出了一笔贷款,为期一年,一年之后企业偿还本息 OB ,也就是说企业此时负债 OB 。在这一年里,企业用从银行贷出的款项进行扩大经营或进行投资,假定企业的资产的市场价值为 V_t ,假如贷款到期日为 T ,也就是一年期满,企业的资产的市场价值为 V_T 。当 $V_T = OA_1 > OB$ 时,也就是说企业的资产的市场价值高于负债价值,企业有能力偿还贷款,银行得到企业偿还的本息,当 $V_T = OA_2 < OB$ 时,企业资产的市场价值低于债务价值,无力偿还贷款,企业违约,银行得到企业的剩余资产。这一过程如下图所示。



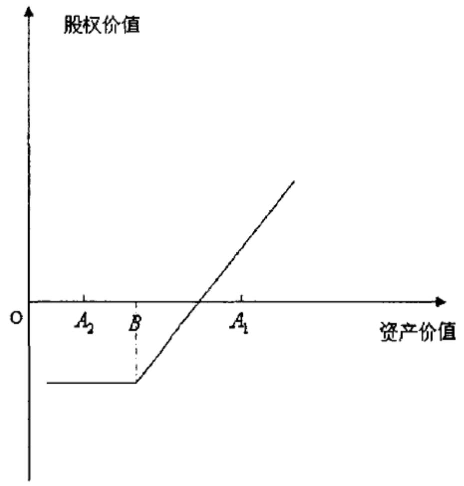
通过上图,可以看到银行所面对的情形同看跌期权中期权开立者情形十分类似。而通过上面的例子可以看出影响企业偿还与否的主要因素有五个:企业的资

产价值V_A、债务价值OB、无风险利率r、企业资产价值的波动率σ_A以及到期日T。这五个因素正好与决定股票期权价值的五个因素(股票市场价格S、期权执行价格K、无风险利率r、股票的波动率σ、期权到期日T)相对应,股票的看跌期权的价值与企业违约选择权的价值是同构的,公式如下:

股票的看跌期权的价值$=f(S,K,r,\sigma,T)$,

企业违约选择权的价值$=f(V_A,B,r,\sigma_A,T)$.

KMV 模型的创新之处在于它是从企业的角度出发的,也就是说将上述过程倒转过来,即以企业为第一角度看待偿还贷款问题。通俗地讲,企业贷款后负债,当到还款期时,如果企业的资产的市场价值大于负债,企业选择还款,并保有其资产的剩余价值;如果企业的资产的市场价值小于负债,企业选择违约,只能清算后将资产转交给银行。其过程趋势如下:



在这里需要考虑两方面的内容,同样也是 KMV 模型中的两个重要关系:(1)企业股权的市场价值V_E与其资产的市场价值V_A之间的结构性关系;(2)企业资产价值的波动性σ_A与企业股权波动性σ_E之间的关系。由上图可知,企业所面临的情况同看涨期权的开立者的情形十分类似,根据 Black-Scholes 看涨期权的公式可以得出V_E与V_A的关系式:

$$V_E = h(V_A,B,r,\sigma_A,T) \tag{2.5}$$

进一步,由伊藤引理可知,企业资产价值的波动性σ_A与企业股权波动性σ_E之

间也存在一定的关系

$$\sigma_E = g(\sigma_A). \tag{2.6}$$

通过求解（2.5）和（2.6）两个公式,可以得到V_A和σ_A,进而可以得到由它们构建的一个度量指标即违约距离DD，最后通过违约距离与违约率的映射关系,得到预期违约率EDF 。

2.3、KMV 模型的参数估计

KMV 模型的实现主要分三大步骤。第一步,根据上市公司股权的市场价值、股权波动率以及违约点水平,计算出公司资产的市场价值及其波动率;第二步,根据求出的资产价值确定公司未来的预期资产价值,构建一个度量指标,也就是违约距离;第三步,通过违约距离与违约率的映射关系,得到预期违约率。

1)、KMV 模型的基本假设

在 KMV 模型中,公司的资产价值同其资本结构息息相关,公司的违约距离就是公司的资产价值同负债价值相关的内生变量。KMV 模型的假设如下:

(a)市场是无摩擦的,即市场中没有税收(tax),也没有交易成本(cost),资产可以无限细分,并可以不断进行交易;

(b)市场充分活跃,满足无套利原则;

(c)KMV 模型中的利率r是无风险利率,它是一个常数;

(d)公司资产价值服从几何布朗运动,即

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.7}$$

μ为期望回报率(expected return rate)(常数),

σ为波动率(volatility)(常数),

dW_t为标准 Brown 运动(standard Brown motion),

$E(dW_t) = 0,$

$Var(dW) = dt,$

(e)公司的资产结构只有所有者权益、短期负债和长期负债,也就是说公司价

值等于股东权益与债务价值之和;

(f)在给定的未来时期,公司的资产价值服从对数正态分布;

(g)上市公司的股票价格服从对数正态分布;

(h)公司在债务到期之前不会发生违约;

(i)当公司的资产价值高于违约点水平时,公司不会违约;当公司的资产价值低于违约点水平时,公司才会选择违约。

2)、KMV 模型的参数设定

(a)上市公司股权的市场价值V_E及其股权波动率σ_E;

(b)上市公司资产的市场价值V_A及其资产波动率σ_A;

(c)无风险利率r、公司资产价值预期收益率μ以及风险期限T;

(d)违约点(DPT);

(e)违约距离(DD);

(f)预期违约率(EDF)。

(g)债务的账面价值(D)

3)、KMV 模型的参数计算步骤

I. 确定上市公司股权的市场价值V_E及其股权波动率σ_E

上市公司股权的市场价值V_E及其股权波动率σ_E都可以通过历史数据得到。

上市公司股权的市场价值=股本数×单位股权价格;

由于股票价格服从对数正态分布,股票日收益率μ_n为:

$$\mu_n = \ln(\frac{S_{n+1}}{S_n}) \tag{2.8}$$

这里, S_n表示第 n 天股票的收盘价。

首先得到股权日波动率σ'为:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \overline{\mu})^2} \tag{2.9}$$

其中，$\bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ (2.10)

然后得到股权年波动率为：

$$\sigma_E=\sigma'\sqrt{t} \quad (2.11)$$

其中，t 为股票实际交易天数

II. 确定违约点 DPT

违约点的位置往往处于公司流动负债与全部负债之间的某一处,KMV 公司根据大量的破产公司的历史数据发现：当公司价值等于流动负债加上长期负债的一半的时候,违约发生最频繁。这个临界点用公式表示如下：

$$DPT=STD+\frac{1}{2}LTD \quad (2.12)$$

其中，STD 表示公司的流动负债，LTD 表示公司的长期负债。

III. 确定上市公司资产的市场价值 V_A 及其资产波动率 σ_A

根据 Black-Scholes 期权定价公式,可以得到股权价值与资产价值的关系为:

$$V_E=V_A N(d_1)\text{-}De^{-rT}N(d_2) \quad (2.13)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{V_A}{D}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \quad (2.14)$$

$$d_2=d_1-\sigma_A\sqrt{T} \quad (2.15)$$

进一步,根据伊藤引理，对公式(2.10)求导并两边求期望得到股权波动率和资产价值波动率的关系式:

$$\sigma_E=\frac{V_A\sigma_A}{V_E}\cdot\frac{dV_E}{dV_A} \quad (2.16)$$

其中，$\frac{dV_E}{dV_A}$ 为期权的 Delta 值，又欧式期权的 Delta 值为 $N(d_1)$，故上式可表示为：

$$\sigma_E=\frac{N(d_1)V_A\sigma_A}{V_E} \quad (2.17)$$

已知无风险利率 r 以及信用期限 T 确定,根据公式(2.10)与(2.14),可以得到公司的资产价值 V_A 及其波动率 σ_A.

IV. 确定违约距离 DD 和预期违约率 EDF

违约距离 DD 表示公司资产未来的预期价值的均值与违约点水平之间的距离,用公式表示如下:

$$DD=\frac{E(V_A)-DPT}{\sigma_A E(V_A)} \tag{2.18}$$

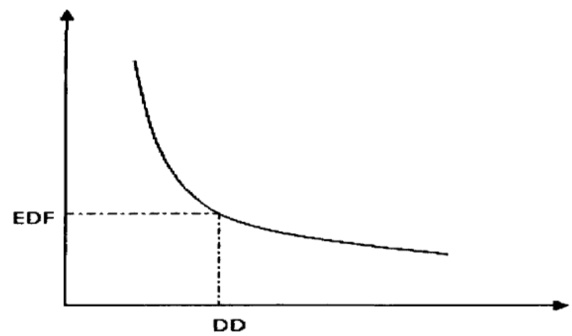
其中, $E(V_A)$ 表示公司资产价值的期望值

违约距离是一个标准化的度量方法,在 KMV 模型中,违约距离代表着公司偿还债务的能力,违约距离越大,公司的经营状况越好,发生违约的概率也就越小;反之,公司偿还债务的能力越小,违约的概率越大。通过历史数据的统计结果显示,用违约距离来衡量上市公司的信用风险也就是预期违约率(EDF)是符合实际的。

预期违约率 EDF 的计算有方式有两种:理论 EDF 和经验 EDF。假设公司价值遵循几何布朗运动,基本结构与公司价值密切相关,而违约概率是与债务额和债务人公司资产结构相关的内生变量。同时,KMV 模型假设投资组合是高度分散的,并且市场利率和总体经济状况是可以预先确定的。通常还要假设资产价值是服从正态分布或对数正态分布,这样就能计算理论上的违约概率。但是做出该假设可能是不现实的,尤其是现实资产价值的分布存在着尖峰厚尾的特征,考虑到这一点,KMV 公司采用了经验的 EDF:

$$\text{经验}EDF=\frac{\text{年初资产价值距}DPT\text{有}n\sigma\text{远的企业中一年内违约的数量}}{\text{年初资产价值距}DPT\text{有}n\sigma\text{远的企业总数}}$$

KMV 公司运用了大量违约公司样本的历史数据库,通过比较违约距离和破产频率,拟合出了一条平滑的曲线,代表公司违约距离与预期违约率之间的映射关系,以此来估计预期违约率的大小。违约距离与经验预期违约率的映射关系如图:



KMV 公司先计算出公司的违约距离，然后与映射图对应，在图中找到对应的经验 EDF 值。

由于我国尚未建立违约的历史数据库，无法像 KMV 公司那样计算公司的经验 EDF 值，因此在实证中仍采用理论 EDF 衡量公司的信用风险，其方法如下：

在公司的资产市场价值服从对数正态分布的假设下，公司的违约概率可以表示为：

$$P_T = P\{V_A{}^T < D_t \mid V_A{}^0 = V_A\} = P\{\ln V_A{}^T < \ln D_t \mid V_A{}^0 = V_A\} \tag{2.19}$$

其中，P_T 是 T 时刻的违约概率，$V_A{}^T$ 是 T 时刻公司资产的市场价值；

公司资产价值服从几何布朗运动，当给定 $T=0$ 时刻公司资产的市场价值为 V_A 时，在 T 时刻公司资产的价值为：

$$\ln V_A{}^T = \ln V_A + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A{}^2)T + \sigma_A\sqrt{T}\varepsilon \tag{2.20}$$

其中：μ 是公司资产收益率的期望值，ε 是该收益率的随机因子。

综合公式(2.16)和(2.17)，违约率可以表示为：

$$P_T = P\{\ln V_A{}^T + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A{}^2)T + \sigma_A\sqrt{T}\varepsilon < \ln D_t\} \tag{2.21}$$

经过整理可得：

$$P_T = P\{\frac{\ln\frac{V_A}{D_t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A{}^2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \geq \varepsilon\} \tag{2.22}$$

BSM 模型假设资产收益率的随机因子 ε 服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此，可以根据累计正态分布计算 P_T：

$$P_T = N\left(-\frac{\ln\frac{V_A}{D_t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A{}^2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) = N(-DD) \tag{2.23}$$

KMV 公司将这个违约概率称为公司的预期违约率（EDF），这是 KMV 模型的最终目标，KMV 模型就是用预期违约率来度量信用风险的。

三、EM 算法与 KMV 模型的应用

3.1、EM 算法的原理

EM 算法，即期望最大化(Expectation Maximization)算法，它是一种求解最大似然估计的迭代算法。它不是直接对复杂的后验分布进行极大化或模拟，而是在观察数据的基础上添加一些“潜在数据”，从而简化计算并完成一系列简单的极大化或模拟。关于 EM 算法，最早可以查阅的资料是 McKendrick(1926)的一篇论文，他在医药用途中考虑到这一算法；Hartley(1958)考察了一般情况下的计算数据并极大地发展了这一理论;Orchard 和 Woodbury(1972)最先提出这一潜在想法的一般适用性；Sundberg(1974)明确地考虑了一般似然方程的性质，Beale 和 Little(1975)进一步将理论发展到正态模型。EM 这一术语是由 Dempster, Laird 和 Rubin(1977)引入，他们证明了算法性质的一般结论，同时还提供了大量的各类实例。自 1977 年之后，随着大数据的不断兴起，EM 算法又出现了很多新的应用， 在多个领域被广泛应用。

EM 算法是从非完整的数据集中对参数或参数向量进行极大似然估计,此方法广泛地应用于处理缺损数据、带讨厌参数的数据、带有噪声的数据、截尾数据等不完整数据。EM 算法包括两个步骤,即 E 步和 M 步,它是通过迭代最大化完整数据的对数似然函数的期望来最大化不完整数据的对数似然函数。E 步(估计步骤):假设模型的数据是完整的,即先设定待估参数,计算完整数据的对数似然函数的条件期望;M 步(最大化步骤):求出新参数使得对数似然函数的条件期望值达到最大,将得到的新参数代回 E 步,继续计算条件期望,再进行 M 步,通过多次的迭代循环，直到参数满足收敛条件。

一般地，称 $p(\theta|Y)$ 为观测后验分布，表示 θ 的基于观测数据的后验分布密度函数，称 $p(\theta|Y,Z)$ 为添加后验分布，表示添加数据 Z 后的得到的关于 θ 的后验分布密度函数，而用 $p(Z|\theta,Y)$ 表示在给定 θ 和观测数据 Y 下潜在数据 Z 的条件分布密度函数。目的是计算观测后验分布 $p(\theta|Y)$ 的众数，EM 算法如下进行：记 $\theta^{(i)}$ 为第 $i+1$ 次迭代开始时后验众数的估计值，则第 $i+1$ 次迭代的两步为：

E 步：将 $p(\theta|Y,Z)$ 或 $\ln p(\theta|Y,Z)$ 关于 Z 的条件分布求期望，从而把 Z 积掉，

即

$$Q\left(\theta \mid \theta^{(i)},Y\right) \triangleq E_Z[\ln p(\theta \mid Y,Z) \mid \theta^{(i)},Y]$$
$$=\int \ln[p(\theta \mid Y,Z)]p(Z \mid \theta^{(i)},Y)dZ \tag{3.1}$$

M 步：将$Q\left(\theta \mid \theta^{(i)},Y\right)$极大化，即找一个点$\theta^{(i+1)}$，使得：

$$Q\left(\theta^{(i+1)} \mid \theta^{(i)},Y\right)=\max_{\theta} Q\left(\theta \mid \theta^{(i)},Y\right) \tag{3.2}$$

如此形成了一次迭代$\theta^{(i)} \to \theta^{(i+1)}$。

为了应用 EM 算法，从初始估计$\theta^{(0)}$开始，将上述 E 步和 M 步进行迭代直至$\left\|\theta^{(i+1)}-\theta^{(i)}\right\|$或$\left\|Q\left(\theta^{(i+1)} \mid \theta^{(i)},Y\right)-Q\left(\theta^{(i)} \mid \theta^{(i)},Y\right)\right\|$小于某规定值时停止，迭代结束。

可以看出，连续地估算$\theta^{(i)}$不会使似然函数减少。似然函数保持递增直至遇到最大值（局部的或全部的），也就是说 EM 算法是收敛的。

3.2、EM 算法在 KMV 模型中的应用

市场上可以直接获取的数据只有上市公司的股票交易价格和财务数据，因而能够直接计算上市公司的股权总值V_E和违约点DPT，但是并不能直接获得公司总资产值V_A以及公司总资产的期望收益率μ和波动率σ_A。由于公司总资产的期望收益率μ和公司总资产的波动率σ_A是内生的，所以不能直接求得公司总资产值，而是需要先估计μ和σ_A。

用$\{V_E^0,V_E^h,V_E^{2h},\ldots,V_E^{nh}\}$表示可以从市场上直接观察到的公司的股权总值的时间序列，这里h表示时间的长度，单位为年。如：债券到期时间为 1 年，则$h=\frac{1}{250},n=250$.

由前面对模型假设的分析可知，公司总资产的对数概率分布满足：

$$\ln(V_A^{h(i+1)} \mid V_A^{hi}) \sim N[\ln V_A^{hi}+(\mu-\frac{\sigma_A^2}{2})h,\sigma_A^2 h] \tag{3.3}$$

故公司资产对数概率分布的密度函数为：

$$\ln(V_A^{h(i+1)} | V_A^{hi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2 h}} \exp\{-\frac{(\ln(\frac{V_A^{h(i+1)}}{V_A^{hi}}) - (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})h)^2}{2\sigma_A^2 h}\} \tag{3.4}$$

由于$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$是无法直接观测到的潜在数据，而由(2.10)式可见$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$的分布难以由$\{V_E^0, V_E^h, V_E^{2h}, ..., V_E^{nh}\}$的分布而显式地表达出来，因此，利用转换数据与转换函数来对此进行实现。

假设X是一个不能直接观察到的n维随机向量，服从分布函数族$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$，$\theta$是$R^k$的一个开子集。存在一个可观察到的随机向量$Y$，满足$Y = T(X, \theta)$或$X = T^{-1}(Y, \theta)$，则$Y$为$X$在转换函数$T$下的转换数据。设$Y$的极大似然函数为$L(Y, \theta)$，如果参数$\theta^* \in \Theta$使得$L(Y, \theta)$满足

$$L(Y, \theta^*) = \sup_{\theta \in \Theta} L(Y, \theta) \tag{3.5}$$

则θ^*即是所求的转换数据极大似然参数。

假设X到Y的转换函数满足$y_i = T_i(x_i, i = 1, ..., n; \theta)$，$X$的概率密度函数为$f(x)$，$Y$的概率密度函数为$g(y)$，由转换函数可以得到：

$$g(y) = f(x)[\frac{\partial y}{\partial x}]^{-1} \tag{3.6}$$

如果转换函数是连续且二次可微的，则有

$$L(Y; \theta) = L_X(\hat{x}_i(\theta), i = 1, ..., n; \theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \frac{dT_i(\hat{x}_i(\theta); \theta)}{dx_i} \right| \tag{3.7}$$

其中，$\hat{x}_i(\theta) = T_i^{-1}(y_i; \theta)$.

KMV 模型中，公司资产价值$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$是随机变量，公司股权价值$\{V_E^0, V_E^h, V_E^{2h}, ..., V_E^{nh}\}$是公司资产价值$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$的转换数据，所以$\{V_E^0, V_E^h, V_E^{2h}, ..., V_E^{nh}\}$也是随机的，即实际股票价格序列是随机过程$\{V_E^0, V_E^h, V_E^{2h}, ..., V_E^{nh}\}$的一个样本。将未观察到的随机变量$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$看作缺失数据（$V_E^{hi}$均可观测），可以利用 EM 算法 获得参数$\theta = (\mu, \sigma_A^2)$的极大似然估

计。

由于潜在随机变量$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$服从对数正态分布，通过转换函数，能够方便地将股权价值的分布用资产价值表示。可以得到：

$$p(\theta | V_E^{hi}) \propto p(V_E^{hi} | \theta) = \Pi_{i=0}^{n-1} g(\ln V_E^{h(i+1)} | V_E^{hi}) \cdot (\frac{\partial V_E^{h(i+1)}}{\partial \ln V_E^{h(i+1)}})^{-1} \tag{3.8}$$

公司股权价值的对数极大似然函数为（E 步）：

$$L_E(V_E^{hi}, i = 0,1,...,n; \mu, \sigma_A)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_A^2 h) - \sum_{i=1}^{n} \ln \hat{V}_A^{hi} - \sum_{i=1}^{n} \ln(N(\hat{d}_{hi})) - \frac{1}{2\sigma_A^2 h}\sum_{i=1}^{n}[\ln(\frac{\hat{V}_A^{hi}}{\hat{V}_A^{h(i-1)}}) - (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})h]^2 \tag{3.9}$$

其中，$\{\hat{V}_A^0, \hat{V}_A^h, \hat{V}_A^{2h}, ..., \hat{V}_A^{nh}\}$是给定$\sigma_A$时，所得到的公司资产价值的估计值；$\{\hat{d}_0, \hat{d}_h, \hat{d}_{2h}, ..., \hat{d}_{nh}\}$是与$\{V_A^0, V_A^h, V_A^{2h}, ..., V_A^{nh}\}$相应的 $\{d_0, d_h, d_{2h}, ..., d_{nh}\}$的估计值，且$\frac{\partial V_E^{hi}}{\partial V_A^{hi}} = N(d_{hi})$.

关于μ, σ_A进行极大化，亦即令$L_E(V_E^{hi}, i = 0,1,...,n; \mu, \sigma_A)$ 分别对μ, σ_A分别求偏导数并令其为 0，可得如下结果：

对μ极大化：

$$\mu = \frac{1}{nh}\ln(\frac{\hat{V}_A^{hi}}{\hat{V}_A^{h(i-1)}}) + \frac{1}{2}\sigma_A^2 \tag{3.10}$$

对σ_A^2极大化将上式中得出的μ的表达式代入，即可得

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{\hat{V}_A^{hi}}{\hat{V}_A^{h(i-1)}}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{\hat{V}_A^{hi}}{\hat{V}_A^{h(i-1)}})^2 \tag{3.11}$$

由μ, σ_A^2的迭代式可见，需获得$\ln(\frac{\hat{V}_A^{hi}}{\hat{V}_A^{h(i-1)}})$的值，亦即给定$\mu, \sigma_A$下隐含的资产回报$\{R_1, R_2, ..., R_n\}$，这里$R_i = \ln(\frac{V_A^{hi}(\sigma_A)}{V_A^{h(i-1)}(\sigma_A)})$。则可得

$$\overline{R}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i \tag{3.12}$$

$$\begin{cases}\hat{\sigma}_A^2=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\overline{R})^2\\ \hat{\mu}=\frac{1}{h}\overline{R}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_A^2\end{cases} \tag{3.13}$$

这便是 M 步。

对于 E 步，由于本文 KMV 模型的特殊性，$\{V_A^0,V_A^h,V_A^{2h},...,V_A^{nh}\}$可在$\mu,\sigma_A$给定时通过已观测数据 $\{V_E^0,V_E^h,V_E^{2h},...,V_E^{nh}\}$计算得到，故不需再对$R_i$, $\overline{R}$求期望。

3.3、EM 算法的计算步骤

第一步：任给参数μ,σ_A的初始值μ^0, σ_A^0；

第二步：假设第 i 次迭代中得到的参数的估计值为$\mu^{(i)}$, $\sigma_A^{(i)}$，由 $\{V_E^0,V_E^h,V_E^{2h},...,V_E^{nh}\}$，计算$\{V_A^0(\sigma_A)^{(i)},V_A^h(\sigma_A)^{(i)},V_A^{2h}(\sigma_A)^{(i)},...,V_A^{nh}(\sigma_A)^{(i)},\}$；

第三步：计算隐含的资产回报$\{R_1^{(i)},R_2^{(i)},...,R_n^{(i)}\}$， $R_k^{(i)}=\ln(\frac{V_A^{hk}(\sigma_A)^{(i)}}{V_A^{h(k-1)}(\sigma_A)^{(i)}})$，并更新资产的波动率和漂移率：

$$\overline{R}^{(i)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_k^{(i)} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases}\sigma_A^{(i+1)}=[\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(R_k^{(i)}-\overline{R}^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}}\\ \mu^{(i+1)}=\frac{1}{h}\overline{R}^{(i)}+\frac{1}{2}(\sigma_A^{(i+1)})^2\end{cases} \tag{3.15}$$

第四步：根据第三步得到的$\mu^{(i+1)}$和$\sigma_A^{(i+1)}$，重复第二步和第三步，直到μ,σ_A按要求收敛，即可求得参数μ,σ_A的极大似然估计值$\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}_A$。

3.4、单支债券信用风险的度量

在本节中，将对 KMV 模型在度量单支债券信用风险时的实用性及准确性进行分析。将会看到在引入 EM 算法之后，KMV 模型度量单支债券信用风险的结果得到改善，对规避和量化管理信用风险具有了更高的参考价值。

1)、参数的选择

I. 上市公司股权市场价值 V_E

我国上市公司股权可分为流通股和非流通股两部分，其中非流通股大多为国有或国有法人股。本文选择如下的计算方法：

流通股的市场价值 = 收盘价格 × 流通股股数；

非流通股的市场价值 = 每股净资产 ×（上市公司总股本 - 流通股股数）；

公司股权价值 = 流通股的市场价值 + 非流通股的市场价值

= 收盘价 × 流通股股数 + 每股净资产 × 非流通股股数

II. 上市公司违约点 DPT

一般来说，公司资产价值到达该公司债务的账面价值总值时，只有少数的公司会发生违约，大多数公司会继续运营并偿还公司的债务，长期债务给予上市公司更多周转的空间。由于公司并不需要在到期日偿还所有的负债，因此 KMV 模型设定了一个违约点 DPT，不考虑公司具体的债务结构，将模型的违约点等同于短期债务(短期债务等同于流动负债)加长期债务的一半，即 $DPT = STD + 0.5LTD$

III. 上市公司的资产价值的收益率 μ 和波动率 σ_A

二者可以通过前文中由 EM 算法得到的迭代公式(3.15)来估计。

IV. 上市公司资产价值 V_A：将资产价值的收益率 μ、波动率 σ_A 以及公司股权价值 V_E，代入公式(2.13)中，通过数值计算方法直接解出。

V. 违约距离 DD 和预期违约率 EDF

根据(2.18)式，将 Dt 设为违约点 DPT，即 T 时刻公司资产价值，V_A 小于 DPT 则违约，有：

$$DD = \frac{\ln\frac{V_A}{D} + (\mu - \frac{{\sigma_A}^2}{2})t}{\sigma_A\sqrt{t}} \tag{3.16}$$

其中V_A为上市公司在该年度最后一个交易日的资产价值，D为上市公司债务的账面价值，将资产价值的收益率μ和波动率σ_A代入上述公式中即可得到公司的违约距离，其中信用风险评估时间 T 设定为一年，即只考察上市公司在未来一年内的信用风险。预期违约概率则由$EDF = N(-DD)$得到。

2）、样本选取

在齐鲁证券的帮助下，选取了 15 家信用评级较高的公司和 4 家在 2013 年股市上表现较差的公司进行数据分析和研究”。

表 3.1：15 家信用评级较高的公司及它们对应的信用评级

证券代码	证券简称	信用评级	证券代码	证券简称	信用评级
002087.SZ	新野纺织	AA/AA	600219.SH	南山铝业	AA/AA
002309.SZ	中利科技	AA/AA+	600283.SH	钱江水利	AA/AA
002422.SZ	科伦药业	AA+/AA	600590.SH	泰豪科技	AA/AA+
600016.SH	民生银行	AAA/AA+	600795.SH	国电电力	AAA/AAA
600026.SH	中海发展	AAA/AAA	600798.SH	宁波海运	AA/AA
600028.SH	中国石化	AAA/AAA	600820.SH	隧道股份	AA+/AA+
600085.SH	同仁堂	AAA/AAA	601318.SH	中国平安	AAA/AAA
601988.SH	中国银行	AAA/AAA			

表 3.2:4 家在 2013 年股市上表现较差的公司

证券代码	证券简称	证券代码	证券简称
002506.SZ	ST 超日	600546.SH	山煤国际
600381.SH	ST 贤成	601699.SH	潞安环能

使用的数据包括这些公司的股价数据、每股指标、股本数据以及负债数据等，数据的时间跨度为 2007 年 1 月份至 2013 年 9 月份。

3）、参数计算

按前文提到的参数计算方法，计算出了这 19 家公司的资产价值、资产价值波动率、违约距离和预期违约率。用传统的 fsolve 方法和 EM 算法这两种方法分

别进行了计算，结果如下所示：

传统方法的结果：

表 3.3：传统方法下 15 家信用评级较高公司的相关指标

证券名称	资产价值	波动率	违约距离	预期违约率
中国平安	3,294,882,272,684.36	0.0024	142.7507	0
中国银行	13,475,164,779,787.60	0.0076	41.9566	0
民生银行	3,388,173,640,198.56	0.0115	29.7461	9.73E-195
国电电力	202,619,717,742.80	0.0391	15.1664	2.95E-52
中国石化	1,237,151,846,103.70	0.0494	14.3097	9.52E-47
隧道股份	53,362,558,259.88	0.0426	11.7607	3.11E-32
宁波海运	7,278,959,621.08	0.0821	11.1899	2.29E-29
同仁堂	33,046,094,153.87	0.2099	10.5346	2.99E-26
中海发展	60,299,472,499.84	0.0913	10.4472	7.55E-26
新野纺织	4,658,147,830.31	0.0751	9.6472	2.53E-22
南山铝业	21,137,501,811.50	0.1044	9.5868	4.54E-22
泰豪科技	7,059,498,349.38	0.0995	9.0298	8.60E-20
科伦药业	25,981,458,551.12	0.1715	8.7662	9.24E-19
中利科技	15,220,557,700.08	0.0624	8.7452	1.11E-18
钱江水利	4,889,631,449.38	0.1115	7.8904	1.51E-15

表 3.4：传统方法下 4 家表现较差公司的相关指标

证券名称	资产价值	波动率	违约距离	预期违约率
ST 超日	8,111,258,168.05	0.0391	11.6763	8.42E-32
ST 贤成	5,180,722,178.74	0.0927	10.4568	6.82E-26
潞安环能	55,158,495,080.77	0.1133	8.9389	1.97E-19
山煤国际	49,451,481,703.81	0.0479	7.9411	1.00E-15

EM 算法的结果：

表 3.5：EM 算法下 15 家信用评级较高公司的相关指标

证券名称	资产价值	波动率	违约距离	预期违约率
同仁堂	33,067,743,218.76	0.6099	3.8308	0.00006385
中国银行	12,838,055,547,207.20	0.0955	3.7129	0.00010246
中海发展	47,359,656,714.39	0.3516	3.6059	0.00015554
国电电力	186,152,717,831.74	0.3421	3.6053	0.00015587
中国石化	1,215,249,112,570.61	0.2457	3.5946	0.00016247
中国平安	2,930,820,631,403.25	0.2399	3.5094	0.00022453
民生银行	3,144,473,430,432.80	0.1681	3.501	0.00023172
中利科技	14,923,778,680.27	0.1719	3.4825	0.00024838
泰豪科技	6,937,918,224.93	0.3263	3.4504	0.00027989
钱江水利	4,814,785,578.99	0.3008	3.4299	0.00030188
新野纺织	4,672,838,743.00	0.1837	3.4294	0.0003025
南山铝业	20,927,104,941.35	0.3389	3.3718	0.00037342
隧道股份	50,110,953,747.04	0.3102	3.3506	0.00040314
科伦药业	25,643,568,185.83	0.6013	3.273	0.00053207
宁波海运	7,152,219,407.55	0.2132	3.0256	0.00124085

表 3.6：EM 算法下 4 家表现较差公司的相关指标

证券名称	资产价值	波动率	违约距离	预期违约率
潞安环能	53,630,455,934.66	0.5627	2.1297	0.0165996
ST 贤成	4,988,330,044.84	0.5223	2.0317	0.02109286
山煤国际	41,875,526,500.84	0.564	1.1147	0.13248023
ST 超日	7,185,069,680.93	0.4507	0.8704	0.19204473

4）、结果分析

为了利于分析，把传统方法和EM算法的结果列示在同一张表中进行比较：

表3.7：传统方法和EM算法的结果对比：

证券名称	传统方法预期违约率	EM算法预期违约率
同仁堂	2.99E-26	6.39E-05
中国银行	0	0.000102
中海发展	7.55E-26	0.000156
国电电力	2.95E-52	0.000156
中国石化	9.52E-47	0.000162
中国平安	0	0.000225
民生银行	9.73E-195	0.000232
中利科技	1.11E-18	0.000248
泰豪科技	8.60E-20	0.00028
钱江水利	1.51E-15	0.000302
新野纺织	2.53E-22	0.000303
南山铝业	4.54E-22	0.000373
隧道股份	3.11E-32	0.000403
科伦药业	9.24E-19	0.000532
宁波海运	2.29E-29	0.001241
潞安环能	1.97E-19	0.0166
ST贤成	6.82E-26	0.021093
山煤国际	1.00E-15	0.13248
ST超日	8.42E-32	0.192045

从上表可以看到，由传统方法计算出的预期违约率非常微小，以至于达到了可以忽略不计的程度，这种方法得到的违约率对于度量债券的信用风险而言几乎没有任何参考价值。而反观EM算法，由这种方法得出的预期违约率要更为合理。这一点通过下面的对比分析会更加明显：

首先，将 15 家信用等级较高的公司按照它们各自的信用级别分为三组，分别是：AAA 级，AA+级和 AA 级。然后采用穆迪公司公布的信用评级数据作为客观标准，将前面两种方法的结果分别与这一国际公认的客观标准进行比较，查看哪一组更加与国际标准吻合。对比结果如下图所示：

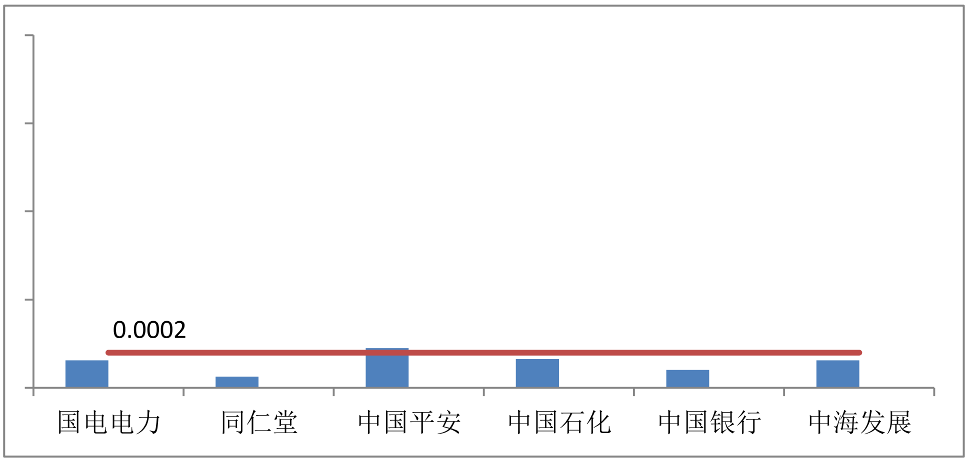


图 3.1：两种方法的结果与 AAA 级标准的对比

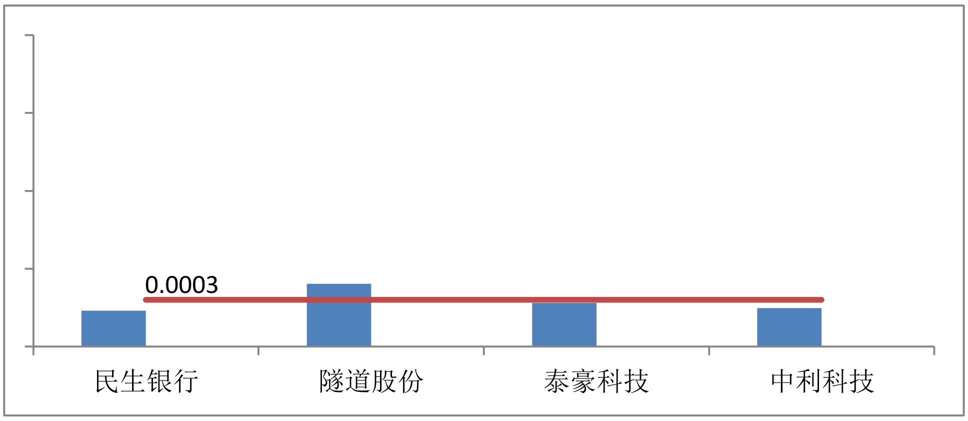


图 3.2：两种方法的结果与 AA+级标准的对比

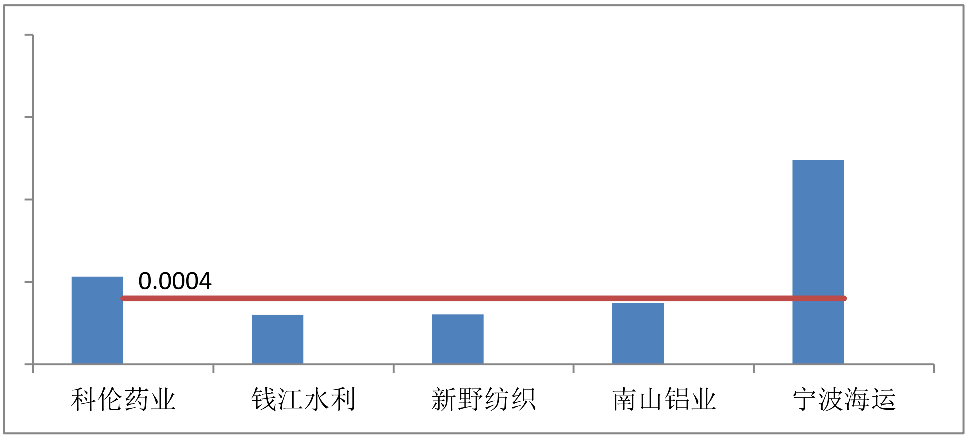


图 3.3：两种方法的结果与 AA 级标准的对比

表 3.8：传统方法和 EM 算法的结果与国际标准评级违约率对比：

信用评级	标准违约率	EM算法平均结果	传统方法平均结果
AAA	0.0002	0.00015	1.76e-26≈0
AA+	0.0003	0.00029	3.00e-19≈0
AA	0.0004	0.00055	3.01e-16≈0

上述三幅图中的横线是评级机构发布的相应级别的年度违约概率，柱形图部分是 EM 算法下每个公司的预期违约率，可以看到 EM 算法的结果与评级机构的结果具有较高吻合程度；由于传统方法的结果非常小，以至于在上述图中显示不出来，这也是在上述图中无法观测到它们的原因。由这三幅图可以对 EM 算法的准确性有一个直观的认识，EM 算法的引进使 KMV 模型在度量单支债券的信用风险时有了更高的准确性和更强的实用性。单支债券的信用风险的准确度量是组合信用风险度量的基础，只有单支债券的信用风险度量准确了，组合的信用风险才有可能进行准确的度量；如果单支债券的信用风险的度量都不够准确的话，那么组合信用风险的度量自然也就失去了参考价值。

四、债券组合的信用风险

相对于单支债券的信用风险，对组合信用风险进行度量更有实际意义，但实现起来也更为困难；目前，直接将 KMV 模型用于组合信用风险度量的研究还很少，可以应用的成果也不多。在本项目中，先后提出了三种度量组合信用风险的方法。这些方法由浅入深，反映了本文研究过程的逐步深入，从中可以看到对度量组合信用风险的探索过程。

4.1、从单支债券到债券组合的过渡

组合是由单个债券构成的，组合的信用风险也与组合内每一支债券的信用风险息息相关。为度量组合的信用风险，需要对组合内每一支债券的信用风险进行准确的度量，这可以用 EM-KMV 模型得到。在准确的度量了组合内每一支债券的信用风险之后，可以提出一种简单直观的方法，来评价债券组合的信用风险。下面以前文提到的 15 家信用评级较高的公司为例来进行说明。

采用 EM 算法，算出这 15 家公司的预期违约率，并将结果与标准违约率进行了对比，结果如下：

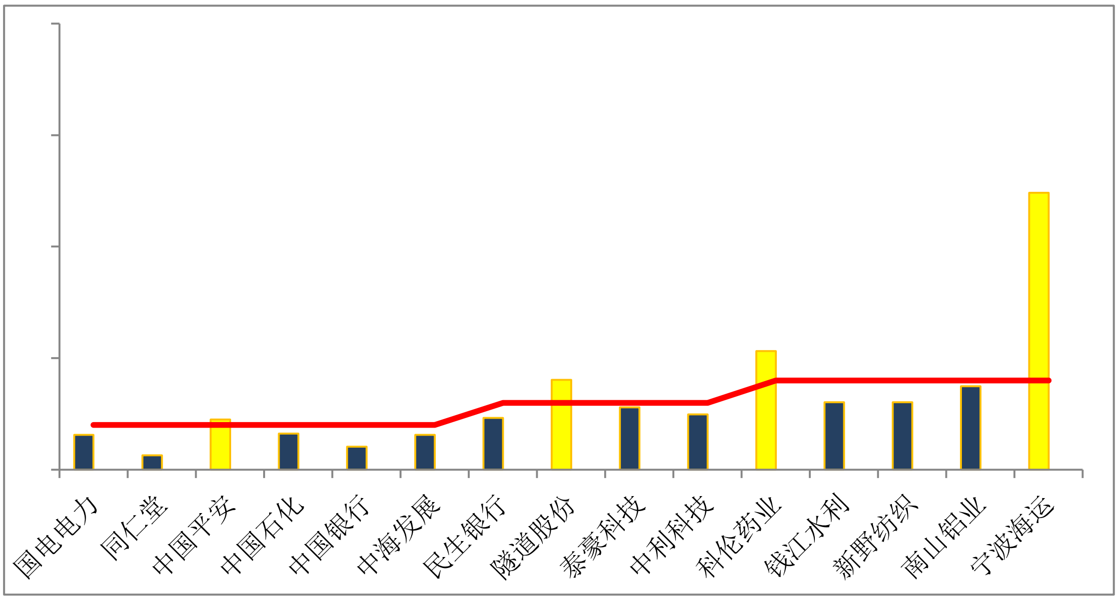


图 4.1：EM 算法的结果与标准违约率的对比

上图中红色阶梯形水平线表示的是穆迪公司公布的 AAA 级、AA+级和 AA 级债券对应的违约概率，将其画在图中作为评判债券风险的标尺。一旦某支债券越过“红线”，则需提高对其信用风险的关注。正如图中用黄色矩形标示出的四家公司（中国平安、隧道股份、科伦药业、宁波海运），它们均超过了红色标准线，应提起相当程度的注意。同样，对于一个债券组合，也可以用这种方法来监测其中的信用风险。具体而言可以从两个维度进行衡量：一是组合内超出红线债券的“数量”，二是组合内债券超出红线的“幅度”。可以设想，如果在某一时期内，组合中有多支债券的违约率越过红线之上，而且幅度很大，那么相关风控部门就应发出预警，采取措施防范可能发生的信用损失。

这是本文提出的第一种度量组合信用风险的方法，它以精确度量单支债券的信用风险为基础，在度量组合风险时显得简单直观，可以作为防范债券组合违约风险的第一道防线。但是，这种方法没有给出具体的指标来度量信用风险的大小，带有一定的主观性。另外，它没有考虑组合内各公司之间可能存在的违约相关性，而这是度量组合信用风险时需要考虑的一个问题。

4.2、违约相关性

实际情况中，由于违约相关性的存在组合的信用风险并不是组合内每家公司信用风险的简单相加，考虑组合的信用风险时，组合内各公司之间可能存在的违约相关性也是必须要考虑的问题。

违约相关性是客观存在的，它可以描述两家公司同时违约的倾向。违约相关性意味着信用风险不能够被完全分散，当资产组合与多家交易对手有关时，违约相关性是决定组合违约损失的概率分布的重要因素。

违约相关性的存在是有多种原因的，如同一行业或同一地理区域的公司所受外界影响的因素往往一样，如果中国钢铁企业大面积破产的话，那么必和必拓等与铁矿石相关的厂商必然也会不好过。这种情形是显而易见的，但也有一些不太容易发现的例子，如俄罗斯的国债和墨西哥的国债相关性有多大？在通常情况下，其相关性很小，但由于国际市场越来越整体化，购买俄罗斯国债的和购买墨西哥国债的是同一批买家。当其中一个国家违约时，投资者会恐慌性抛售另外一个国家的国债，使得违约相关性急剧增加。

历史上，市场交易中主要使用评级公司的评级和历史统计样本数据来确定违约相关性，即先确定各个证券的评级，然后利用评级公司公布的数据来计算违约率和相关性。但是，这种方法存在一些问题，如评级公司的评级存在滞后效应；债券价格以市场计价，所以债券违约相关性也应与市场价相应变动，单独使用评级数据达不到这个效果等。

过去流行的方法是利用皮尔逊相关系数来衡量违约相关性，在这种方法中，用皮尔逊相关系数描述相关关系，相关系数的定义为：

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \tag{4.1}$$

皮尔逊相关系数损失了很多信息，并不是一个最优的相关性衡量指标，究其原因，有以下几点：

1、皮尔逊相关系数的运算过程并不具有非线性严格单增变换下的不变性，如：

$$\rho(\ln\frac{X_t}{X_{t-1}},\frac{Y_t}{Y_{t-1}}) \neq \rho(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}},\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}})$$

因此，如果用皮尔逊相关系数对金融数据进行相关性分析时，采用不同的数据方向，就会得到不同的结论。

2、皮尔逊相关系数过分依赖于金融数据的边缘分布，而且不一定在[-1.1]中全部取到。

3、两个变量之间相关关系很强，但是皮尔逊相关系数却可能为零，如果 $X \sim N(0,1)$，$Y = X^2$，X 和 Y 之间有明显的相关性，但它们的皮尔逊相关系数却为零。皮尔逊相关系数只是衡量了变量间的线性相关性，不能衡量更复杂的相关性。因此对于具有错综复杂的相关性的金融数据进行研究分析时，仅用皮尔逊相关系数作为相关性的衡量指标会对违约相关性产生错误的判断。

4.3、Copula 函数

在衡量违约相关性方面，金融市场中一种流行的做法是用 Copula 来对违约相关性进行刻画。Copula 函数首先由 Sklar 在 1959 年提出，1998 年 Nelson 对 Copula 理论做了系统的阐述。2001 年，李祥林在 Journal of Fixed Income 上发表了论文题为 On Default Correlation: A Copula Function Approach 的文

章。这篇文章引入了衡量违约概率和违约相关性的 Copula 模型，Copula 相关性以其合理的说明以及简易的模型而被交易员和评级公司广泛应用于 CDO（债务抵押证券）的定价和评级。

1)、Copula 函数的概念

在 Copula 函数的理论中，下面的定理是一个重要的结果，它是使用 Copula 函数的基础。

定理：令 F 是边际分布为 $F_1, F_2, ..., F_N$ 的 N 元联合分布函数，那么存在一个 Copula 函数 C 使得

$$F(x_1, x_2, ..., x_N) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_N(x_N)) \quad (4.2)$$

若 $F_1, F_2, ..., F_N$ 连续，则 C 唯一确定。反之，若 C 是一个 Copula 函数，$F_1, F_2, ..., F_N$ 是一元分布函数，则上述函数 F 是边际分布为 $F_1, F_2, ..., F_N$ 的联合分布函数。

这个定理揭示了 Copula 函数的存在性，而且还给出怎么利用联合分布函数来求它们的 Copula 函数的方法，即可以利用变量的联合分布函数和边缘分布的反函数来求它们的 Copula 函数。根据这个定理，利用边缘分布函数和 Copula 函数可以构建更多联合分布函数，而不只是局限于数据的多元正态分布或者多元 t 分布的假设。对违约概率的联合分布可以从两方面来考虑，一是数据的边缘分布二是其相关结构，可以将违约概率中蕴含的相关关系剖离出来，用 Copula 函数进行深入分析和度量。

2)、常用的 Copula 函数

目前，最经常被使用的 Copula 函数有两大类：

I. 椭圆组 Copula 函数

假设 F 是一个服从椭圆形分布的多元累积分布函数，F_i 是其边缘分布，F_i^{-1} 是边缘分布函数的分位数函数。那么由分布函数 F 所确定的连接椭圆 Copula 函数的形式表达式为：

$$C(x_1, x_2, ..., x_N) = F(F_1^{-1}(x_1), F_2^{-1}(x_2), ..., F_N^{-1}(x_N)) \quad (4.3)$$

椭圆族 Copula 函数由其分布的对称性以及模拟过程的易实现性，在金融领域得到广泛运用。

① 多元正态 Copula 函数

正态 Copula 函数也称为高斯 Copula 函数，是连接多元正态分布的一个函数。

$$C(u_1,u_2,...,u_N)=\phi_R(\phi^{-1}(u_1),\phi^{-1}(u_2),...,\phi^{-1}(u_N)) \tag{4.4}$$

其中ϕ_R是具有相关系数为 R 的多元标准正态分布，ϕ^{-1}是标准正态分布函数的反函数。

② t-Copula

t-Copula 函数是衔接多元学生 t 分布及其边缘分布的一种 Copula 函数。

$$C_v^t(u_1,u_2,...,u_N)=t_v^N(t_v^{-1}(u_1),t_v^{-1}(u_2),...,t_v^{-1}(u_N)) \tag{4.5}$$

II. 阿基米德 Copula 函数

Genest 和 Mackay 给出了阿基米德 Copula 函数的标准定义，表达式为：

$$C(u_1,u_2,...,u_N)=\phi^{-1}(\phi(u_1),\phi(u_2),...,\phi(u_N)) \tag{4.6}$$

其中函数ϕ是阿基米德 Copula 函数的母函数，它是一个凸的减函数。

阿基米德 Copula 函数具有很多经常用到的性质。首先，从阿基米德 Copula 函数的表达式可知，阿基米德 Copula 函数图像具有对称性；其次，阿基米德 Copula 函数就有可连接性；另外阿基米德 Copula 函数的计算比较简单。下面是常用到的几种阿基米德 Copula 函数：

① Gumble Copula 函数

$$C_G(u_1,u_2;\rho)=\exp[-((-\ln u_1)^{\frac{1}{\rho}}+(-\ln u_2)^{\frac{1}{\rho}})^{\rho}] \tag{4.7}$$

② Clayton Copula 函数

$$C_C(u_1,u_2;\rho)=(u_1{}^{-\rho}+u_2{}^{-\rho}-1)^{-\frac{1}{\rho}} \tag{4.8}$$

③ Frank Copula 函数

$$C_F(u_1,u_2;\rho)=-\frac{1}{\rho}\ln(1+\frac{(e^{-\rho u_1}-1)(e^{-\rho u_2}-1)}{e^{-\rho}-1}) \tag{4.9}$$

3)、Copula 函数的参数估计

Copula 函数在使用中的参数估计分为各个边缘分布的参数估计和 Copula 函数的参数估计两个主要部分

I．边缘分布函数的参数估计

首先，引入连续随机变量生存时间T，它表示从现在到违约事件发生时的时间长度。引入函数$F(t)$和$S(t)$，其中$F(t)$表示在t时刻已经违约的概率，而$S(t)$则表示在t时刻还没有违约的概率，它也被称为生存函数。

根据函数的定义，可以得到

$$F(t)=P_r(T\le t),S(t)=1-F(t)=P_r(T>t) \tag{4.10}$$

可以看出，$F(t)$其实就是生存时间T的累积分布函数。

现在来计算一下资产在x时刻没有违约的情况下，在Δx时段内违约的概率

$$P_r[x<T\le x+\Delta x]=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}=\frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)} \tag{4.11}$$

其中$f(x)$是$F(x)$的密度函数。

定义危险率函数$h(x)$，它表示条件违约概率密度。

$$h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=-\frac{S^{'}(x)}{S(x)} \tag{4.12}$$

从上式可以得到：

$$S(t)=e^{-\int_0^t h(s)ds} \tag{4.13}$$

$$f(t)=h(t)(1-F(t))=h(t)S(t)=h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} \tag{4.14}$$

这样，如果知道危险率函数，就可以计算出生存函数，也可以计算出生存时间的密度函数。特别的，当危险率函数是一个常数的时候，就可以通过边际分布的一个点刻画得到。信用曲线是危险率函数的图形表示，它代表信用资产在不同时刻的条件违约概率密度，有了信用曲线，就可以计算不同的违约相关性。获得信用曲线的方法有：

① 从评级机构的历史数据中获得找到每一个信用等级的债券在n年中的总违约概率，然后利用n年总违约概率与每年的条件违约概率之间的函数关系，使用递归方法推导出每年的条件违约概率；

② 使用布莱克-舒茨方法，将股票看作一个公司的看涨期权，用这个架构可以获

得n期的违约概率，然后将其转换为危险率函数；

③ 从现有的市场信息中获得公司一系列不同期限债券的到期收益率，并将它与国债的到期收益率比较，获得收益率价差曲线，然后假设一个外生的回复率，就可以推算出信用曲线。

这三种方法在国外都是可行的，但是在国内，信用市场才刚刚起步，还没有权威的评级机构对我国各个上市公司给出一个具有公信力的历史违约概率信息。对于第三种方法，需要得到公司债务或资产互换利差各个时间点的数据，从而构建公司债到期收益率的信差期限结构。我国的信用衍生市场还处在初步摸索阶段，发行公司债的企业还不多。即使已经发行公司债的企业，由于发行数量过少，目前还不足以建立起自己的信差期限结构。资产互换信差信息更是很难得到。使用的 KMV 模型，就是选择的第二种方法。首先由 KMV 模型得出公司各个时期的累积违约概率，并转换为公司的条件边际违约概率，最后在危险率是常数的假设下，得到公司的危险率函数。

II. Copula 函数的选择和参数估计

如何才能确定选用的 Copula 函数是否合适，或者说如何选择一个比较合适的 Copula 函数，这是 Copula 函数在使用过程中的一个难点，目前还没有统一的方法。在使用 Copula 函数的过程中，可知以下方法所选择的 Copula 函数有较好的使用效果：

① 图示法

由 Copula 函数的分类可知，Copula 函数主要有两大类：椭圆族和阿基米德族。图示法主要是用来判断所选数据是否服从椭圆族 Copula，因为椭圆族 Copula 函数的分布图像是对称性的，且椭圆族 Copula 函数分布呈正态分布迹象，因此很容易通过所选数据的散点图，P-P 图，Q-Q 图和直方图来判断数据是否服从椭圆族。阿基米德族函数也可以通过类似的方法得到一个近似的结果。

② 拟合优度检验法

③ 最小方差检验

确定了边缘分布及选择了合适的 Copula 函数之后，下一步需估计 Copula 函数中的参数，这是 Copula 函数中的又一难点；目前，可以采用下面的方法来对参数进行估计：

① Copula 极大似然估计法（EM 算法）

② 分步估计法

③ 非参估计

4）、Copula 函数的优点

常用的皮尔逊相关系数对数据的要求是线性的，而从 Copula 函数的性质就可以知道，由 Copula 函数对数据进行的一致性和相关性测度，数据的线性或非线性变换都不改变数据本身的性质，因此用 Copula 函数来进行违约相关性度量更具有实用性和广泛性；另外，Copula 函数可用于构建灵活多样的多元分布；运用 Copula 理论构建资产间相关关系的模型时，可以把随机变量的边缘分布和它们之间的相关结构独立分离开来进行研究，而且边缘分布的选择不受限制，对数据的变换不再拘泥于线性条件，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不会影响结果。因此构建在 Copula 理论上的模型更实用、更有效，可以更为精确的衡量债券间的违约相关性。

4.4、度量组合信用风险的实施步骤

在考虑了违约相关性之后，按以下步骤来度量组合的信用风险，当然，不同的方法在具体应用的时候可能会略有不同。

1. 用 KMV 模型计算出可能需要的关于每一家公司的参数，如它们的预期违约率、回收率等；确定每一家公司的边际违约概率分布；

2. 选择合适的 Copula 函数以衡量违约相关性，并对 Copula 函数中的参数进行估计；

3. 根据选择的 Copula 函数计算组合的联合违约概率分布，进而计算组合的平均损失或 VaR 值等指标以度量组合信用风险。

4.5、正态 Copula 函数的应用

在本项目中，首先用正态 Copula 函数来衡量组合内各公司之间的违约相关性的。正态 Copula 函数是目前最常被使用的 Copula 函数，通过实证分析可以看到，在正态 Copula 函数下，组合信用风险的度量问题已经被完全解决。

1）、样本的选取

在正态 Copula 函数下，使用平均损失和 VaR 值这两个指标来度量信用风险，

为此需知对组合内每家公司的投资数量以及总投资额。数据由齐鲁证券提供。

表 4.1：组合内每家公司的投资数量

证券名称	投资数量
新野纺织	18,337,000.00
中利科技	20,000,000.00
科伦药业	49,662,000.00
民生银行	79,915,000.00
中海发展	1,639,000.00
中国石化	82,492,000.00
同仁堂	3,831,616.00
南山铝业	622,610,000.00
钱江水利	9,547,610.00
泰豪科技	46,000,000.00
国电电力	30,445,298.00
宁波海运	1,527,000.00
隧道股份	1,521,184.00
中国平安	536,000.00
中国银行	53,254,000.00
投资总额	1,021,316,184.50

除了这些投资数据外，还需要使用这些公司的股票数据、每股指标数据、资产负债表数据等，这些数据都是有齐鲁证券提供的，数据的时间跨度为从 2007 年 1 月至 2013 年 9 月。

2)、参数计算与结果分析

在正态 Copula 函数下，从公司的股票数据出发首先计算出公司之间的股票收益相关性，用股票收益相关性近似公司的资产回报相关性，然后从资产回报相关性计算出公司之间的违约相关性，最后，通过模拟计算的方法得到债券投资组合的平均损失和 VaR 值。在本项目中，进行了三次模拟，模拟的规模分别是一百万、二百万和五百万。每次模拟时的投资是按表 4.1 中的投资数量进行。三次模拟的结果如下表：

表 4.2：模拟结果

模拟规模	平均损失	99%VaR 值
一百万	548735.856	16398174.826
二百万	549544.272	16398174.826
五百万	549715.883	16398174.826

从上述结果可以看到，三次模拟的结果较为接近，这说明模拟的方法比较稳定，特别是对 VaR 值的模拟。模拟结果中，平均损失大约为 55 万元，占总投资额的 0.5‰，这表明在大量重复投资的假设下，只考虑债券发生违约带来的亏损时，平均来讲会有 0.5‰的损失。99％VaR 值约占总投资额的 1.5‰，这样一个结果表明，有百分之九十九的把握认为现在这个投资组合的损失不会超过投资总额的 1.5‰，也就是 16398174.826。

这是项目组提出的第二种度量组合信用风险的方法，与第一种方法相比这种方法不但考虑了违约相关性，而且给出了具体的指标来度量组合的信用风险。在正态 Copula 函数下，组合信用风险的度量问题以及完全解决。但风险度量是一个永无止境的问题，随着社会的发展，经济活动中出现的种种新情况都可能对风险度量提出新的要求。在 2008 年金融危机之前，由于正态 Copula 函数的简单易算，用正态 Copula 函数衡量违约相关性是金融机构的普遍做法，甚至有人认为正态 Copula 是一个可以获得诺贝尔经济学奖的公式。但在金融危机之后，正态 Copula 函数又被认为是摧毁华尔街的公式、是金融危机的罪魁祸首。

4.6、Frank-Copula 函数的应用

由于上述问题的存在，本文并没有满足于只用正 Copula 态函数来衡量违约相关性。在本项目中，又研究了其它类型的 Copula 函数，这些 Copula 函数也有严格的理论基础，它们范围广泛，更能衡量复杂的相关性。这也是将 Copula 函数与 KMV 模型结合的目的，即希望 Copula 函数的引进能使 KMV 模型在度量组合的信用风险时也有较好的效果。

但是，一般的 Copula 函数在使用的过程中有两个难点，一是如何选择一个合适的 Copula 函数，这个问题目前还没有统一的方法；另一个难点是如何估计 Copula 函数中的参数。特别是在多元的情况下，即当组合内公司的数量很多时，

这两个问题就变得特别明显。不过对于二元 Copula 函数，即只考虑两家公司组成的组合时，这些问题还是很容易解决的，这时候 Copula 函数的选择以及它的参数估计都是很容易进行的。虽然只考虑的是两家公司组成的组合，但它对由多家公司构成的组合的信用风险的度量是有启发意义的。下面对二元 Copula 函数的使用进行实证分析。

以中海发展和中国银行为例来对二元 Copula 函数的使用进行说明，先分析两家公司的股票对数日收益率，然后计算两家公司违约概率的边际分布、选择合适的 Copula 函数并估计其参数，最后将选择的 Copula 函数用于这个小组合的信用风险的分析上。

1)、数据分析

选取 2007 年 1 月至 2013 年 9 月中海发展和中国银行的股价数据，对两家公司的股票对数日收益率分别进行分析：

I. 描述性统计及时间序列图

描述统计量

		中海发展	中国银行	有效的 N（列表状态）
N	统计量	1700	1700	1700
全距	统计量	.0876851830	.0875363000	
极小值	统计量	-.0459513420	-.0455004360	
极大值	统计量	.0417338410	.0420358640	
均值	统计量	-.0001541056	.0000100059	
	标准误	.0003159640	.0001888645	
标准差	统计量	.0130275313	.0077870823	
方差	统计量	.000	.000	
偏度	统计量	-.184	.319	
	标准误	.059	.059	
峰度	统计量	1.960	6.447	
	标准误	.119	.119	

图 4.2：两家公司的描述统计量

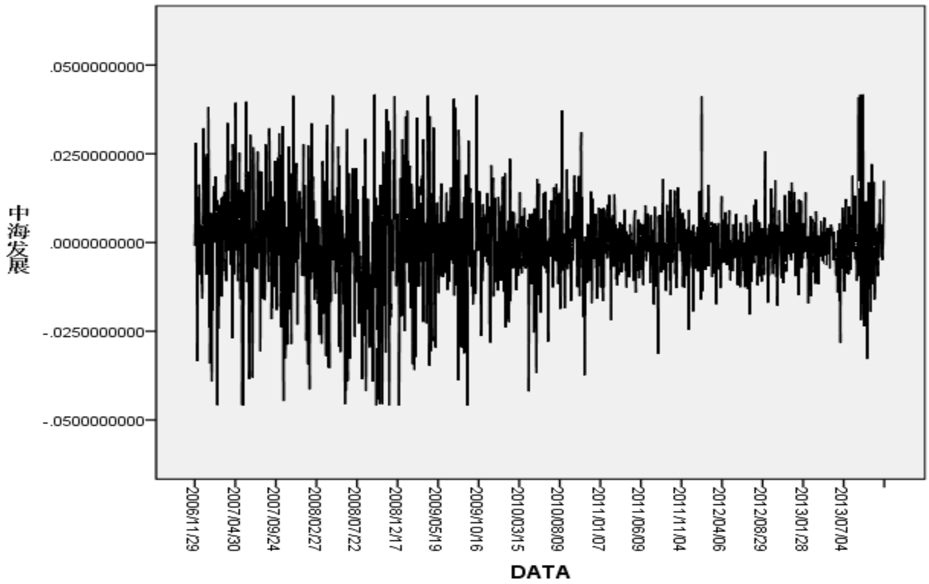


图 4.2：中海发展的股票日收益率的时间序列图

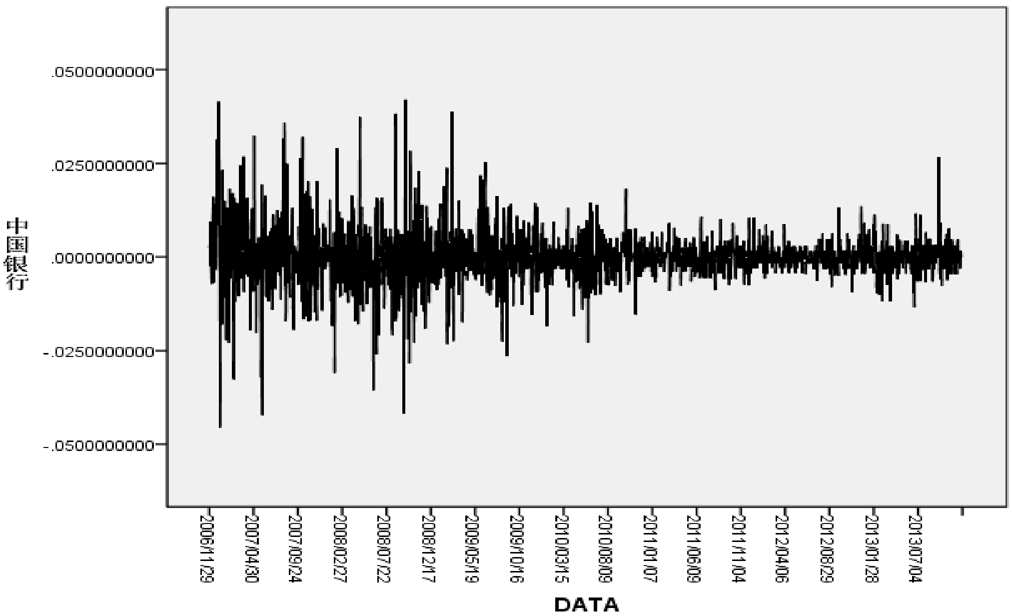


图 4.3：中国银行的股票对数日收益率的时间序列图

由以上描述性统计和序列图可以看出，两家公司的股票对数日收益率的波动范围大体一致；它们的峰度都为正，说明相对于正态分布，它们都具有尖顶峰度；但中海发展偏度为负、中国银行偏度为正，说明中海发展的对数日收益率偏小，这从它们的均值上也可以看出来。在波动较大的几个时段峰值达到极值后又迅速回落，波动频率较快，类似白噪声的序列图，且存在集聚性效应。

II. 正态性检验

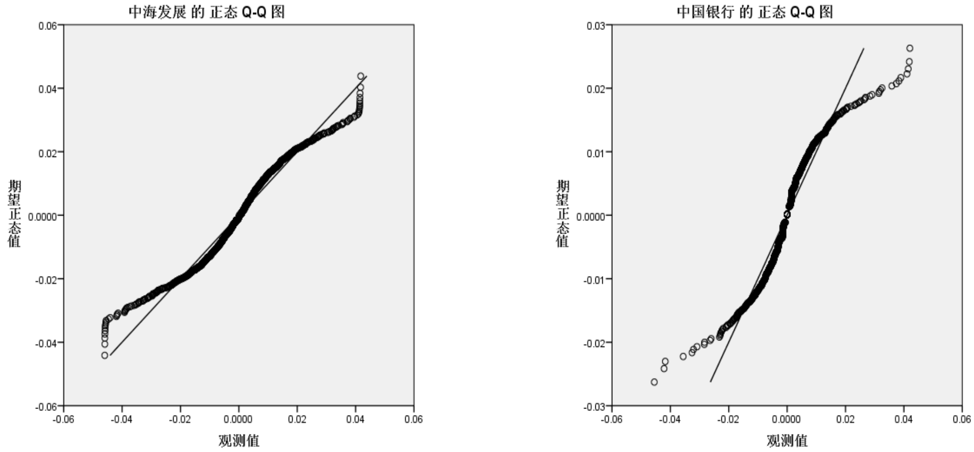


图 4.4：两家公司的股票对数日收益率的正态 Q-Q 图

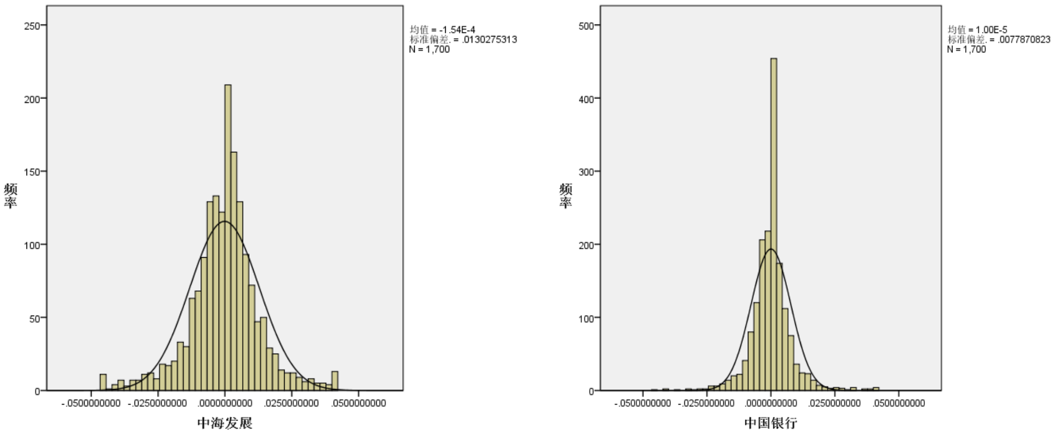


图 4.5：两家公司的股票对数日收益率的直方图

从 Q-Q 图和直方图可以看出，对数日收益率的分布比较对称，并且呈现尖峰厚尾的特点，而正态分布是轻尾分布，所以可以初步断定不服从正态分布。

为进一步确定两家公司的股票对数日收益率的分布，再进行了正态的 JBTEST 检验、LILLIE 检验和 K-S 检验：

表 4. 3：两家公司的三种正态性检验

检验	中海发展	中国银行
JBTEST 检验	h=1, p=1. 0000e-3	h=1, p=1. 0000e-3
LILLIE 检验	h=1, p=1. 0000e-3	h=1, p=1. 0000e-3
K-S 检验	h=1, p=2. 1843e-3	h=1, p=3. 4614e-3

从这三种检验的结果可以看出，h 值均为 1，p 值均小于 0.01，说明中海发展和中国银行的对数日收益率都不服从正态分布，而是服从某种对称的尖峰厚尾

分布，然而在常见的分布中很难见到这类型的分布，故采用非参方法确定。

III. 散点图及相关性分析

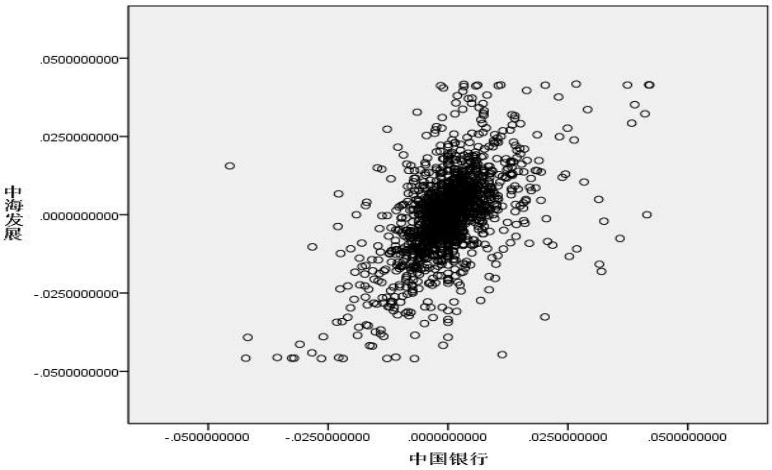


图 4.6：两家公司的股票对数日收益率的散点图

两个公司的对数日收益率主要集中在点（0，0）附近，具有尖峰的特点，有一定的相关性，线性相关系数为 0.2850。

IV. 分布函数的估计

通过样条插值法和核估计方法，分别对中海发展和中国银行的对数收益率的经验分布函数和核估计分布函数进行估计。如下图

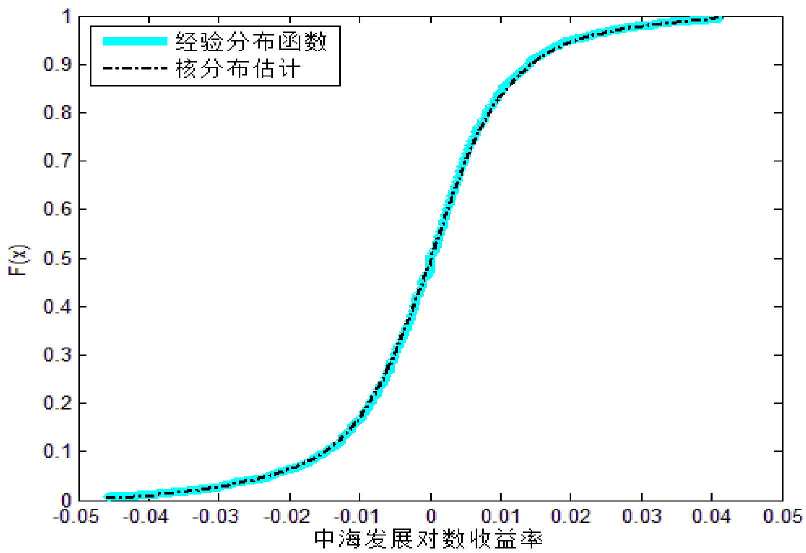


图 4.7：中海发展的经验分布函数和核密度估计

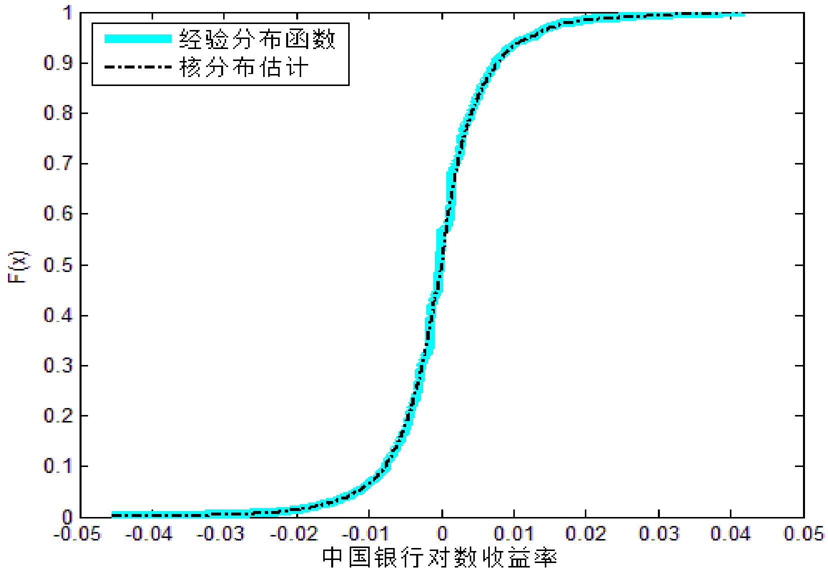


图 4.8：中国银行的经验分布函数和核密度估计

从图中可以看出，样条插值法和核估计方法得到的数据差别都非常小，经验分布函数图和核分布估计图几乎重合。

2）、Copula 函数的选择及参数估计

根据 KMV 模型理论可知，决定公司是否违约最关键的两个因素是公司的资产和负债。而通常将公司在一定时期的负债看成常量，或者是一个容易确定的量，所以导致公司违约和公司之间违约相关的关键因素就可以分别理解为公司资产的变化和公司之间价值的相关性，通过上文关于 Copula 模型的介绍及一些数学基础理论知识，可以得出这样的一个结论：公司间股票价格、股票价格的收益率、公司资产价值以及公司的生存概率都可以用同一个 Copula 函数来连接。

这里为了方便起见，普遍采用的一种方法是将公司的股票收益率的相关性作为衡量公司间资产相关性的一个依据。

采用前文介绍的方法选取 Copula 函数。首先，中海发展和中国银行的二元频数直方图和频率直方图如下：

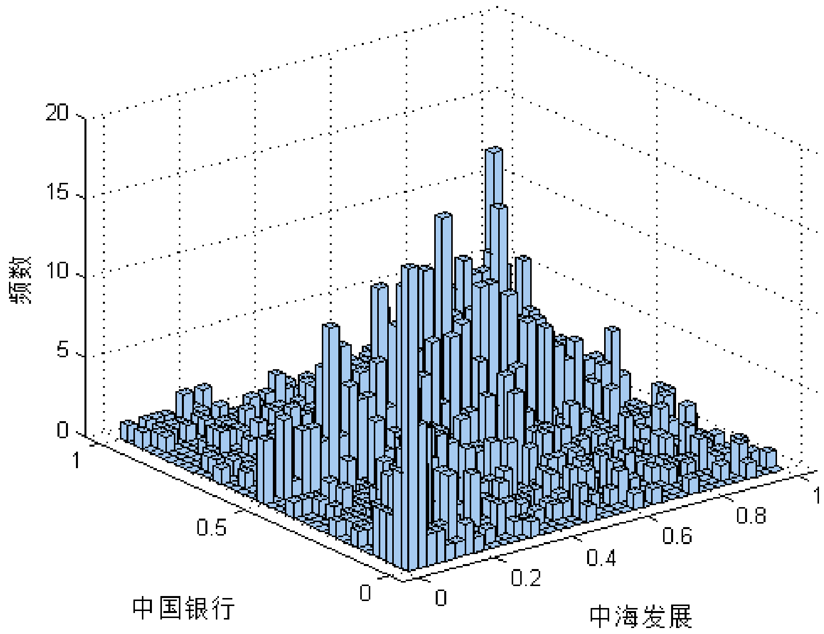


图 4.9：中海发展和中国银行的联合密度函数的频数直方图

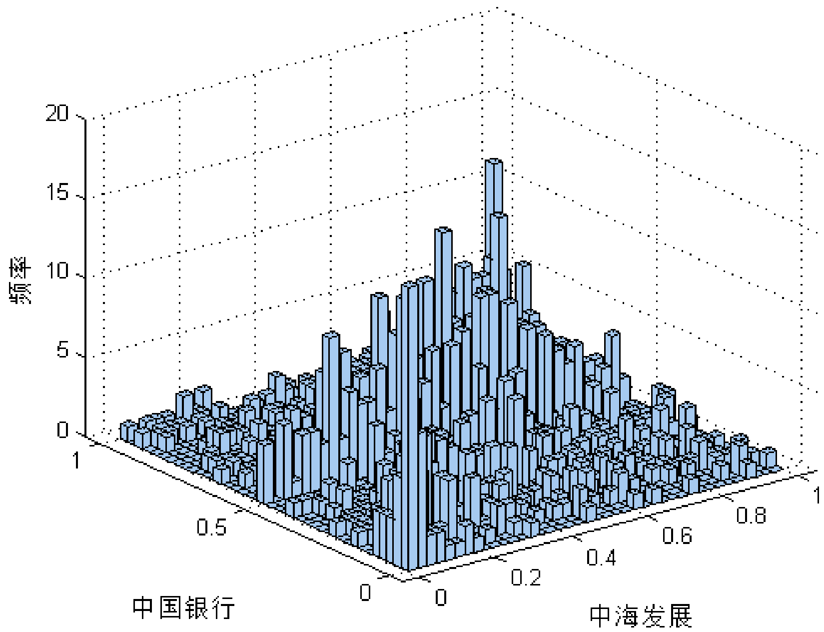


图 4.10：中海发展和中国银行的联合密度函数的频率直方图

其中频率直方图可以作为 Copula 密度函数的估计。从图中可以看出，联合密度函数具有比较对称的尾部,所以可以选取二元正态 Copula 函数、二元 t-Copula 函数以及一些阿基米德 Copula 函数（Frank-Copula 函数、Clayton-Copula 函数和 Gumbel-Copula 函数）来描述原始数据的相关关系。

分别画出二元正态 Copula 函数、二元 t-Copula 函数以及一些阿基米德 Copula 函数(Frank-Copula 函数、Clayton-Copula 函数和 Gumbel-Copula 函数)的密度函数：

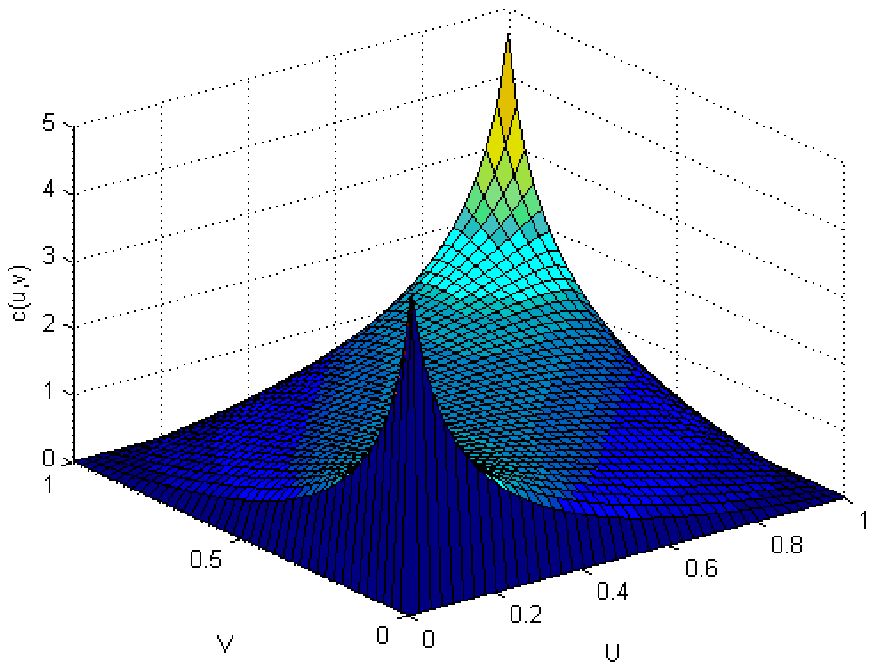


图 4.11：二元正态 Copula 函数的密度函数图

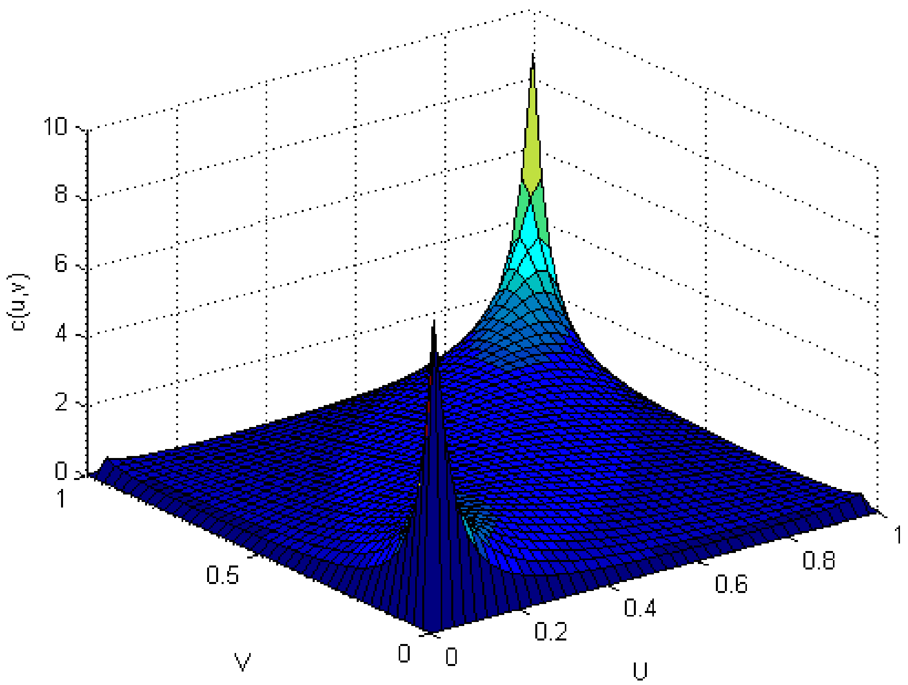


图 4.12：二元 t-Copula 函数的密度函数图

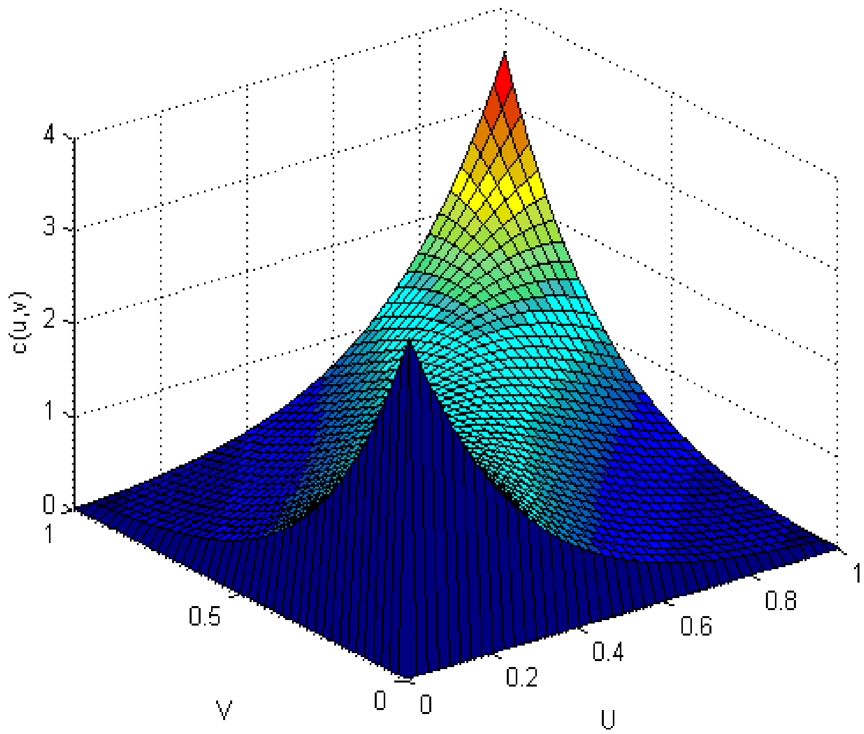


图 4.13：二元 Frank-Copula 函数的密度函数图

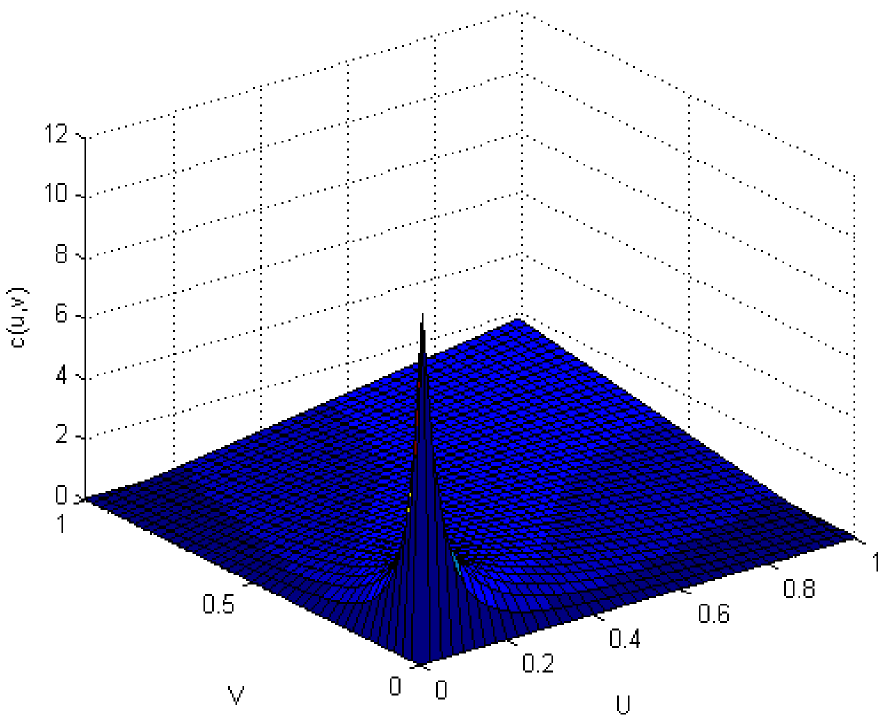


图 4.14：二元 Clayton-Copula 函数的密度函数图

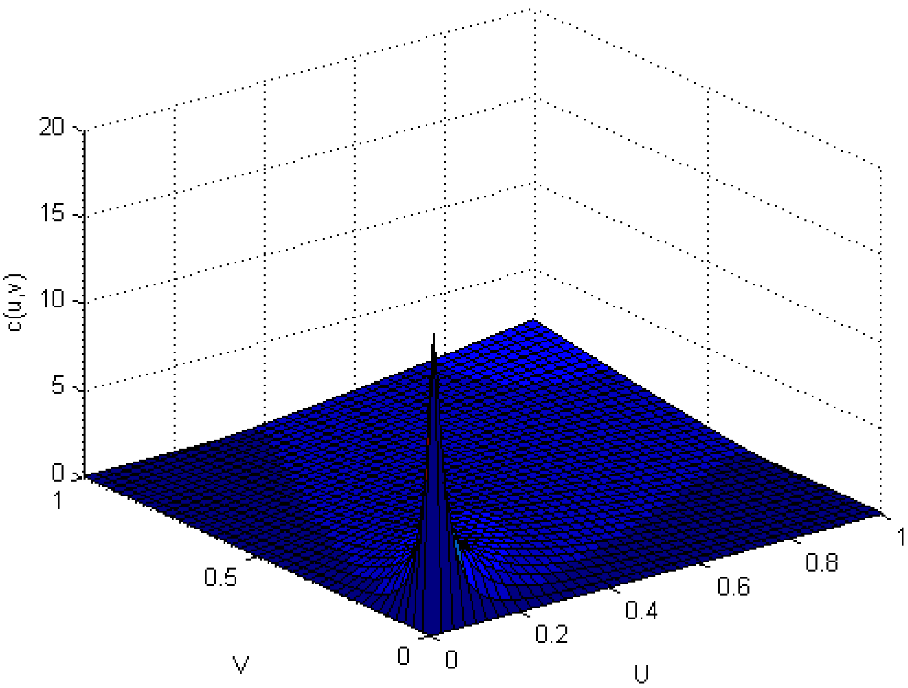


图 4.15：二元 Gumbel-Copula 函数的密度函数图

根据所给出的 Copula 函数的密度函数图和前面两家公司的联合密度函数的频率图，可知应选择用 Frank-Copula 函数来衡量这两家公司的违约相关性。对 Frank-Copula 函数进行了参数估计，得其相关参数为 $\lambda = 4.28267$。

3)、组合信用风险的度量

I. 边际违约概率分布

运用上文 KMV 模型理论、EM 算法及这两家公司的股票数据、资产负债表等相关数据，得到中海发展和中国银行的违约风险。如下表：

表 4.3：两家公司的违约距离、违约概率及一年期危险率

	中海发展	中国银行
违约距离	3.605886907	3.7128655897
违约概率	0.000155544	0.0001024629
一年期危险率	0.000155556	0.0001024681

假设在 t=1 的时间段上危险率是一个常数，这是合理的，因为在短时间内危险率确实变动不大，这样就得到了这两家公司的危险率常数。然后就可以求出两家公司的边际违约概率分布分别为：

中海发展的边际违约概率分布：

$$F_1 = 1 - e^{-0.0001555564t} \tag{4.15}$$

中国银行的边际违约概率分布：

$$F_2 = 1 - e^{-0.0001024681t} \tag{4.16}$$

II.联合违约概率分布

根据两家公司的边际违约概率分布和选择的 Copula 函数，可得这两家公司的违约概率的联合分布函数：

$$F(t_1,t_2) = -\frac{1}{4.28267}\ln\left(1+\frac{(e^{-4.28267\times(1-e^{-0.0001555564t_1})}-1)(e^{-4.28267\times(1-e^{-0.0001024681t_2})}-1)}{e^{-4.28267}-1}\right) \tag{4.17}$$

两家公司之间是否违约可能出现的状态共有四种，根据他们的联合分布可以分别算出每一种状态下的概率，根据对它们的投资数量可以算出每一种状态下的违约损失，如下表：

表 4.4：联合违约概率及违约损失

状态	中海发展	中国银行	概率（%）	违约损失
1	违约	违约	0.000006917238	5927604.6118473
2	违约	不违约	0.01554751311	682219.7542184
3	不违约	违约	0.01023936936	5245384.8576289
4	不违约	不违约	99.97420620029	0

根据上述数据，就能算出两家公司的平均损失，为 643.5726。

前文用 Frank-Copula 函数度量了中海发展和中国银行这两家公司组成的组合的信用风险，关于如何用 Frank-Copula 函数度量多家公司组成的组合的信用风险，可以将这多家公司两两分组，分成若干小组，分别计算每一小组的信用风险状况，然后再将这些小组两两分组，直到能计算出这一个大组合的信用风险。这也是本文提出的第三种度量组合信用风险的方法，当然这种方法还不成熟，关于这种方法的理论和应用研究正在进行中。

五、展　望

到目前为止，一直关注于上市公司的信用风险度量问题，关于非上市公司的信用风险的度量问题仍在研究之中。目前正在研究用 PFM 模型度量非上市公司的信用风险，这种模型的基本思想是用同行业同地区的多家上市公司的资产价值及波动率来估计非上市公司的资产价值及波动率。另外，如何用 Frank-Copula 函数度量由多家公司组成的组合的信用风险，本文虽然提出了一种方法，但这种方法还不成熟，这其中还有很多问题需要解决；程序可视化方面的工作也已经开始进行。这些问题是下一阶段的主要研究内容。

从去年 10 月份开题以来，在项目负责人林路教授的严格要求下，项目组几乎每周都会组织正式的讨论班专门讨论项目进展和下一步的研究计划。正是在林教授的严格要求和项目组全体成员的共同努力下，项目一步一个脚印，基本上达到了预期目标，项目主要成果汇总成此报告书。项目组全体成员感谢齐鲁证券对本项目的大力支持，感谢金融研究院为项目组提供的良好的研究条件！

附录

项目核心程序：

一. fsolve 方法程序：

主程序：

```
for i=1:Len
    c1=X(i);
    c2=VE(i);
    c3=SigE(i);
    R=r(i);
    A(i)=X(i)+VE(i);
    B(i)=SigE(i);
    result=fsolve(@(x)fun(x,c1,c2,c3,R,T),...
           [A(i);B(i)],optimset('Display','iter'));
    VA(i)=result(1);
    SigA(i)=result(2);
  if LTD(i)/STD(i)<1.5
    DPT(i)=STD(i)+0.5*LTD(i);
  else
    DPT(i)=STD(k)+(0.7-0.3*STD(i)/LTD(i))*LTD(i);
  end
    DD(i)=(log(VA(i)/DPT(i))+(R-SigA(i)^2/2)*T)/(SigA(i)*sqrt(T));
    EDF(i)=normcdf(-DD(i));
end
```

二. 二分法程序：

主程序：

```
for k=1: Len
    a=0;
    b=1;
    L=(b-a)/100;
    y=a+L:L:b;
    c1=X(k);
    c2=VE(k);
    c3=SigE(k);
    R=r(k);
    [y,root,rroot,Min,NUM]=Find(y,c1,c2,c3,R);
    VA(k)=(root(NUM)+rroot(NUM))/2;
    SigA(k)=y(NUM);
    E_VA(k)=VA(k)*(1+g(k));
if LTD(k)/STD(k)<1.5
    DPT(k)=STD(k)+0.5*LTD(k);
```

```
else
    DPT(k)=STD(k)+(0.7-0.3*STD(k)/LTD(k))*LTD(k);
end
    DD(k)=(log(VA(k)/DPT(k))+(R(k)-SigA(k)^2/2))/(SigA(k));
    EDF(k)=normcdf(-DD(k));
end
```

三．EM 算法程序（一）:

主程序:

```
function EDF=EM(VE,D,r,sigma0,u0)
n=length(VE);
h=7/(n-1);
T=7*ones(n,1);
format long
for j=1:n
    VA(j)=binarysearch(VE(j),r,T(j),D,sigma0);
end
for i=1:n-1
    R(i)=log(VA(i+1)/VA(i));
end
R0=mean(R);
sigma2=(1/(n*h))*((R-R0)*(R-R0)');
u=R0/n+0.5*sigma2 ;
sigma=sqrt(sigma2);
while (abs(sigma0-sigma)>1e-12)
    sigma0=sigma;
    u0=u;
    for j=1:n
        VA(j)=binarysearch(VE(j),r,T(j),D,sigma0);
    end
    for i=1:n-1
        R(i)=log(VA(i+1)/VA(i));
    end
    R0=mean(R);
    sigma2=(1/(n*h))*((R-R0)*(R-R0)');
    u=R0/h+0.5*sigma2;
    sigma=sqrt(sigma2);
end
DD=(log(VA(n)/D)+(u-sigma*sigma/2)*1)/(sigma*sqrt(1));
EDF=normcdf(-DD);
end
```

EM 算法程序（二）:

```
for i=1:n
    d=d0;
    ve=VE(i);
    va=fzero(@(x)getva(x,ve,d,mu,siga,T),0);
    VA(i)=va;
end
for i=1:n-1
    rk(i)=log(VA(i+1)/VA(i));
end
r_avg=mean(rk);
siga_upd=sqrt(mean((rk-r_avg).*(rk-r_avg))/t);
mu_upd=r_avg/t+siga_upd^2/2;
while (abs(mu_upd-mu>=acc1))&&(abs(siga_upd-siga>=acc2))
    mu=mu_upd;
    siga=siga_upd;
    for i=1:n
        ve=VE(i);
        d=d0;
        a=fzero(@(x)getva(x,ve,d,mu,siga,T),0);
        VA(i)=a;
    end
    for i=1:n-1
        rk(i)=log(VA(i+1)/VA(i));
    end
    r_avg=mean(rk);
    siga_upd=sqrt(mean((rk-r_avg).*(rk-r_avg))/t);
    mu_upd=r_avg/t+siga_upd^2/2;
end
DD1=(log(VA(n)/d0)+(mu_upd-siga_upd^2/2)*T)/(siga_upd*sqrt(T));
EDF=normcdf(-DD1);
```

参考文献

[1] 高扬敏,陈红伟,陈刚.上市公司信用风险的 KMV 模型分析[J].辽宁工程技术大学学报(社会科学版),2009,11(1):20-22.
[2] 顾乾屏,唐宁,王涛,刘明.基于商业银行内部数据的 KMV 模型实证研究[J].金融理论与实践,2010(1):60-63.
[3] 刘祖君.浅谈 KMV 模型[J].社会视野,2010:79-80.
[4] 刘澄,王大鹏.基于 KMV 模型的市政债券信用风险管理问题研究[J].中国管理信息化,2011,14(17):67-69.
[5] 张乃琦.基于 KMV 模型的市政债券融资风险问题研究[J].经济与管理,2012,26(8):38-42.
[6] 杨盈.基于 KMV 模型的我国上市公司信用风险度量[D].山东大学,2012.
[7] 彭伟.基于 KMV 模型的上市中小企业信贷风险研究[J].理论研究,2012,3:23-30.
[8] 许清茹.基于 KMV 模型的上市公司信用风险度量研究[J].中南大学,2011.
[9] 智博毅.基于 copula 函数对宝钢股份、鑫科材料和 ST 太化的组合信用风险度量[D].东北财经大学，2011.
[10] 谢寒清.基于信用风险管理的可违约债券投资组合[D].上海交通大学，2005.
[11] 张爽.投资组合风险分析[J].高教研究，2006,8：5-6.
[12] 尹信.KMV 模型及其在金融风险管理中的应用研究[D].山东大学,2013.
[13] 马勇，张卫国，许文坤，姜茜娅.债券组合信用风险及实证研究[J].系统工程，2012,30（3）：25-30.
[14] 李文龙.可违约债券组合的信用风险和市场风险的集成度量研究[D].浙江财经学院，2013.
[15] 王爱平，张功营，刘方.EM 算法研究与应用[J].计算机技术与发展，2009,19(9):108-110.
[16] 谢中华.MATLAB 统计分析与应用:40 个案例分析[M].北京:北京航空航天大学出版社，2010.
[17] Tucker,L.R,Koopman,R.F.,&Linn,R.L. Research on Credit Risk Measurement Based on Uncertain KMV Model[J].Psychomerika,2010,34,375-394.
[18] David X. Li. On Default Correlation: A Copula Function Approach[J].The RiskMetrics Group Working Paper Number 99-07.
[19] Shige Peng. Backward Stochastic Diﬀ erential Equations,Nonlinear Expectations, Nonlinear Evaluations and Risk Measures[M].Lecture Notes in Chinese Summer School in Mathematics Weihai,2004
[20] Stephen J. Chapman.MATLAB Programming for Engineers[M].Chicago: University of Illinois Press, 1997.
[21] Nelson.R.B An Introduction to copulas[M].New York:Springer,1998.
[22] Romano C.Applying copula function to risk management[Z]. University of Rome, 2002.
[23] Black, E, and M.Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J]. Joumal of Political Economy’May-June 1973, P.637-654.
[24] KMV.KMV and Credit Metrics[M]. San Francisco: KMV Corporation, 1997
[25] KMV.Portfolio Manager Model[M]. San Francisco: KMV Corporation, undated.

[26] Portfolio Management of Default Risk[M]. San Francisco: KMV Corporation, November 15, 1993.
[27] Vasicek, O.K.EDF and Corporate Bond Pricing[J]. San Francisco, KMV, LLC, 1995.
[28] Peter, Crodbie, Jeff Bohn. Modeling Default Risk[J]. Moody,S KMV corporation, 2003.
[29] J.Bohn, N.Arora, I.Korablev, Power and level validation of the EDF credit measure in the U.S market [EB/OL].2005
[30] Stein, Roger M.Evidence on the Incompleteness of Merton-type Structural Models for Default Prediction[J]. Moody'S KMV Corporation, 2005
[31] Johnso, H. And R.Stulz. Te Pricing of Options with Default Risk[J]. Joumal of Finance, June1 987,42(2), 267-270.
[32] Maria Vassalou, Yuhang Xing. Default Risk in Equity Returns. The Journal of Finance, 2004(2).
[33] R.C.Merton. On the pricing of corporate debts: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance. 1974,(29): 449-470.
[34] Peter Crosbie, Jeffrey R BohrL Modeling default risk[J]. White Paper, Mody'S KMV, 2000